函數插補与逼近理論

B. Л. 岡察洛夫

科学出版社

函数插补与逼近理論

В. Л. 岡察洛夫著
路見可等譯

科 学 出 版 社
1958

函数插补与逼近理論

原著者	〔苏〕B. Л. 岡察洛夫
翻譯者	路見可等
出版者	科学出版社 北京朝陽門大街117号 北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
印刷者	中国科学院印刷厂
总經售	新华書店

1958年4月第一版　　書号：1100　　字数：376,000
1958年4月第一次印刷　　开本：787×1092 $^{1}/_{18}$
(京)0001—1,465　　印張：19 $^{2}/_{9}$　插頁：3

定价：(11)4.00元

В. Л. ГОНЧАРОВ

ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

(издание второе, переработанное)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

1954

內 容 提 要

本書系根据苏联技术理論書籍出版社出版的 В. Л. 岡察洛夫所著“函数插补与逼近理論”1954年改写第二版譯出。

本書比較詳細地講述了实变数函数的插补与逼近理論，同时也介紹了复变数函数的这种理論以及在綫性有模空間中的最好逼近法。它可以作为数学系高年級学生与研究生数学参考用書，也可供广泛的数学工作者参考。

本書由武汉大学路見可、程少兰、余家荣及郑州大学吳亲仁合作翻譯。

譯者發現本書俄文原本中有一些有問題的地方，已在譯文中分别加以改正（例如本書第186,187,221,222及325頁对原文更动較大），但是沒有一一明白指出。如果修改得不正确，当由譯者負責，并請讀者指正。

第 二 版 序

函数的插补与逼近理論曾經是并且仍然是近代数学分析發展的主要方向之一，同时也是祖国的(俄国及苏联的)数学創作有特别輝煌成就的部門。

虽然时間过去了二十年，而且在这段时期中主要由祖国的数学家在这一領域中作了巨大的貢献，但是还是需要供广泛讀者使用的这样一本書：它既不使人倦于过多的細节，又充分注意到原則性的关节，因而可以作为現代繼續特别迅速發展的一个科学知識部門的入門。在这門科学向前發展的过程中，出現了新的問題，采用了新的分析工具。沒有可能作出描繪景色的一幅完整的圖画(为此必須还写一本書)，著者决定重版这本长久以前的著作，而有意識地限于在古典的范圍內(有限区間，形为有限和、亦即代数与三角多項式的逼近函数)提出問題。新得到的結果也是在这种条件下来考虑的。为了講述显明的"泛函数分析的"表示法与通常的泛函数术語，著者認为写出补編来概述推广的理論是有益处的[1]。

此外，在本書的結构上作了一些变动：特别是加了第五章来講述在复数区域中函数的插补与逼近問題；但是这并不是說著者要在前面第一至第四章中避免应用复变函数論的工具。

我的老师 C. H. 伯恩斯坦院士贊同了一些想法，謹向他致謝，我也感謝对本書第一版提出了意見的一些人士(特别是 Я. C. 貝西可維奇教授)。我誠恳地感謝 B. C. 維季斯基在編校中所提供的帮助。

B. 岡察洛夫

1954 年 8 月于莫斯科

---

1) 关于这方面材料的簡述，我有一篇論文載在"Научное наследие П. Л. Чебышева (П. Л. 契比謝夫的科学遺产)"論文集，第 1 卷(1945 年)內。

著者序

关于用比較簡单的（形如多項式的）分析式来近似表示連續函数的各种理論，在数学的文献中缺乏一种書籍以連貫講述它們作为其主要任务。如果我們特別注意到函数的逼近法在函数論本身中所已充分發揮的作用，就可看到对于这种書籍的需要很大。我想来补足这个缺陷。

为了說明“函数的插补与逼近理論”的一般內容，只要提出三个人名就够了。其中第一个是函数論的奠基人卡尔·維尔斯德拉斯的名字，他給出了一个重要的定理；在某种意义下，連續函数概念本身可以从这个定理产生出来。第二个是巴弗努吉·李伏維奇·契比謝夫的名字，他作出了首創性的函数的最好逼近法。第三个是塞尔格·納达諾維奇·伯恩斯坦的名字，他沟通两种不同的思想，使得它們相互滲透。

由于材料丰富与情形复杂（如果可以这样說的話），定出講述的計划是很困难的。我想尽力講到广泛的內容，建立一般的統一方案，并且也想依照讀者思想的發展来确定講述的次序。一般說来，在材料的选擇与安排上，还是請原諒著者的某种主观性。在这里談不上有詳尽無遺的講述。我們也不講与本書的基本对象有机地并且在历史上紧密联系着的、而在本質上則屬于較远的領域的許多問題，即屬于有限差論、数学物理方程、保角映射的近似理論以及变分学等等的問題。

我們假定讀者一般通曉大学二、三年級課程范圍內的数学分析，包括复变函数論在內。

在导言中一般地提出了問題后，就概述一系列預备知識与以后必需的参考材料。讀者熟悉了它的內容，在需要时就可参考。

第一章講述狹义的插补法，也就是这一种类型的函数逼近法：逼近的函数与被逼近的函数必須在一系列离散的点恰好有相同的数值。

在第二章中証明連續函数有一致逼近，这时在所考慮的范圍內一切点，逼近与被逼近的函数相差的絕对值不超过預先指定的数（維尔斯德拉斯定理）。

第三章包含实用上最方便的逼近論，亦即平方逼近論（換句話說，这就是用最小二乘法的逼近論）。

而且平方法和插补法一样，它与解綫性方程有关，这就决定了它們的理論已有怎样深刻的發展，并且它們的应用是怎样广泛与多种多样的。

最后，在第四章中考虑到平均冪逼近法(平方逼近法的推广)，以及它們在某种意义下的極限情形，即契比謝夫的最好逼近法。这些逼近法已經沒有綫性，因此在計算上有更大的困难。然而对于契比謝夫逼近法的研究，特别是 C. H. 伯恩斯坦的結果，指出了它們在函数論中的中心地位以及它們与其它类型的逼近法的关系。

这就是本書的計划。

因为我不打算講实际計算的方法，所以相当多的例子主要是用来闡明基本課文并且使它精确化的。

C. H. 伯恩斯坦院士願意在我的工作中作出指示，謹向他热烈致謝；我也很感謝 H. H. 魯金院士与 A. H. 柯尔莫哥洛夫教授对我的工作的兴趣与关切；沒有这些，这項工作可能不会完成的。

1934 年

目　　录

导　　言

第一章　点插补法

第二章 維尔斯德拉斯定理

第三章 平方逼近法

第四章 平均幂逼近法与一致(最好)逼近法

第五章　复数区域中的插补法与逼近法

补編　在綫性有模空間中的最好逼近法

导 言

1. 函数近似表写的概念 作为本書对象的問題可以大致地說明如下：

已給屬于某个（較寬的）函数类 $(\mathfrak{F})$ 的一函数 $f(x)$。另外又指出某一（較窄的）函数类 $(\mathfrak{P})$。需要在 $(\mathfrak{P})$ 类中拣出一函数 $P(x)$，使在某种意义下（究竟在哪种意义下还必須指明）函数 $P(x)$ 与已給的函数 $f(x)$ 相差很小。正如对于任一数学問題一样，在求解时必須回答两个問題：1）滿足所提出要求的函数 $P(x)$ 在类 $(\mathfrak{P})$ 中是否存在？2）若这样的函数存在，那么是仅有一个还是有几个？这时，只能有一个且仅有一个解答的問題才算是确定的。

我們所研究的問題屬于以下两种类型的哪一种，要看是否将周期性条件加在討論的函数上（不論是已知的函数还是未知函数）而定。

在第一类型的問題中，类 $(\mathfrak{F})$ 包括着定义于某基本区間 (a, b) 中的連續实函数 $f(x)$，其中 a 与 b $(a<b)$ 是有限实数；类 $(\mathfrak{P})$ 包涵了通常的实多項式，也就是变数 x 的实系数的有理整函数

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m, \tag{1}$$

而且在某些情况下次数 n 可以預先規定（n 是非負整数）；也还可以加上其他的限制。

在第二种类型的問題中，类 $(\mathfrak{F})$ 包涵了定义于整个实軸 $-\infty<x<+\infty$ 上的具有周期 Ω 的連續实函数 $f(x)$，不失一般性，以后总認为这周期是 2π：

$$f(x+2\pi)=f(x);$$

类 $(\mathfrak{P})$ 是由实的三角多項式所构成，也就是由形状如下的和式所构成：

$$T(x)=\sum_{m=0}^{n}(a_m \cos mx+b_m \sin mx), \tag{2}$$

其中系数 a_m 与 b_m 是实数，而次数 n 可以預先規定，或者还加上其他限制。

上述各类型的問題都可以移到复数域上去，这时类 $(\mathfrak{F})$ 包涵了在全平面上或其一部分上的解析（正則）的函数；而所求的有理多項式或三角多項式的系数也假定是复数。

現在来討論最重要的問題，即是上面的概括的提法"函数 $P(x)$[1] 在某种意义上

1）一般是对于第一类型的問題运用这个符号，而这里我們是兼指两种类型的問題。

与已知函数 $f(x)$ 相差很小"应該怎样来理解.

数学理論發展的道路随着表写函数所采取的基本原則而不同. 在本書中准备收集某些最值得注意的函数表写理論.这里有插补法、平方逼近、平均羃逼近与一致(最好)逼近.

作为插补法理論基础的原則是: 所求多項式 $P(x)$ 在所指定的許多点上必須与已知函数 $f(x)$ 取相同的值,也就是差

$$P(x)-f(x) \tag{3}$$

在所給出的点处要等于零(第一章).

作为羃逼近理論基础的原則是: 在基本区間上的积分

$$\int |P(x)-f(x)|^s dx \quad (s>0) \tag{4}$$

之值必須与零相差很小. 特别重要的就是 $s=2$ 的情形(平方逼近——見第三章与第四章的开始部分).

作为一致逼近理論基础的原則是: $P(x)$ 与 $f(x)$ 差的絕对值(在基本区間上)的極大值

$$\max|P(x)-f(x)| \tag{5}$$

必須与零相差最小(第二章和第四章).

这些原則中每一个可以有各种推广, 也可以应用到上述两种类型問題中任一种上去.

应該滿足怎样的条件,才能使函数表写問題是确定的呢?

在插补法的理論中,通常是这样来限制所求多項式的次数,即要使多項式未定系数的个数等于已給插补点的个数. 必須弄清楚这时所产生的方程組(其未知数就是这些未知系数)是否有一組且仅有一組解.

在逼近(羃逼近或一致逼近)理論中,一方面要限制未知多項式的次数,同时还要求表达式(4)或者(5)取最小的可能的值. 如此就产生一个極值問題(以未知系数作为变数),也需要弄清楚,它是否有解并且只有一个解.

以后还可能有这样的問題. 設多項式序列

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \cdots, P_n(x),\ \cdots$$

是用 n $(n=0,1,2,\cdots)$ 次多項式来插补(或逼近)某一函数这一問題的解. 能不能断定这个多項式序列在某种意义下以原来的函数 $f(x)$ 为極限? 特别是,能不能断定一致收斂性成立,也就是能不能对任一小数 ε, 总存在充分大的数 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时,

对于在所考虑的区間上所有的 x 值，不等式

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

成立？换句話說，函数 $f(x)$ 能不能展开成一致收斂的多項式級数

$$f(x)=P_0(x)+[P_1(x)-P_0(x)]+[P_2(x)-P_1(x)]+\cdots+$$
$$+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\cdots \tag{7}$$

呢？

如果要想知道能不能把給出的連續函数（根据所采取的原則）以任意精确度用多項式来表写，就应該回答这些問題．在以后要仔細地研究这些問題．

下列簡单的例子可以直接地加以考察；它們确鑿地也清楚地証实了函数逼近問題可以用若干不同的方法提出．

例 1. 設要用一次多項式 $P(x)=Ax+B$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上近似地表写指数函数 $f(x)=2^x$，并使它們在点 $x=\pm1$ 处完全相等．我們得到：

$$A+B=2,$$
$$-A+B=\frac{1}{2},$$

于是 $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{4}$；因此就能写出近似的等式

$$2^x\approx\frac{1}{4}(3x+5).$$

所得到的近似式非常不完备，因为在所考虑的区間上曲綫 $y=2^x$ 与直綫相差很远．若将一次多項式换成二次多項式 $P(x)=Ax^2+Bx+C$（即是将直綫换成抛物綫），就会得到較为令人滿意的結果；这时我們还要再加上一点，例如 $x=0$，使已給的指数函数与二次多項式在这一点上也相等．从方程

$$A+B+C=2,$$
$$A-B+C=\frac{1}{2},$$
$$C=1,$$

我們就有 $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{3}{4}$, $C=1$，因此

$$2^x\approx\frac{1}{4}(x^2+3x+4).$$

例 2. 若想在区間 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上用通常的多項式来逼近(偶)函数 $f(x)=\cos x$，自然地对多項式只須引进变数的偶次冪．令 $P(x)=Ax^2+B$ 并且要求它們在 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 处相等，我們就会得

$$\cos x\approx1-\frac{4}{\pi^2}x^2\approx1-0.405x^2.$$

同样，若是用四次多項式 $P(x)=Ax^4+Bx^2+C$ 并再加上一点 $x=\frac{\pi}{3}$，就会导出近似等式

$$\cos x\approx\frac{1}{10}\left(36\frac{x^4}{\pi^4}-49\frac{x^2}{\pi^2}+10\right).$$

例 3. 为了用三角多項式 $T(x)=A\cos x+B$ 来逼近函数 $f(x)=2^{\cos x}$，我們就要求它們在点 $x=0$ 与 $x=\pi$ 处恰好相等，这样就給出

$$2^{\cos x}\approx\frac{1}{4}(3\cos x+5).$$

用类似的方法，令 $T(x)=A\cos 2x+B\cos x+C$，并加上点 $x=\frac{\pi}{2}$，就得到

$$2^{\cos x}\approx\frac{1}{8}(\cos 2x+6\cos x+9).$$

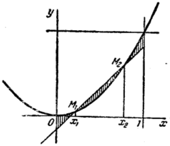


圖 1

例 4. 选取綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使得积分

$$I=\int_0^1|x^2-P(x)|dx$$

(即圖 1 上有陰影的面积)尽可能地小.

直綫 $y=Ax+B$ 与拋物綫 $y=x^2$ 二交点的横坐标 x_1, x_2 滿足不等式 $0<x_1<x_2<1$，由此得到 $B<0, A+B<1, B>-\frac{A^2}{4}$；很显然，此外应該有 $A>0$ 与 $B>-1$. 这些不等式确定了变数 A 与 B 的平面中的一区域，它是在一閉曲綫內部的有限区域. 由計算得出

$$I=\int_0^{x_1}(x^2-Ax-B)dx-\int_{x_1}^{x_2}(x^2-Ax-B)dx+\int_{x_2}^{1}(x^2-Ax-B)dx=$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A-B+\frac{1}{3}(A^2+4B)^{\frac{3}{2}},$$

于是

$$\frac{\partial I}{\partial A}=-\frac{1}{2}+A\sqrt{A^2+4B},\qquad \frac{\partial I}{\partial B}=-1+2\sqrt{A^2+4B},$$

令导数 $\frac{\partial I}{\partial A}$ 与 $\frac{\partial I}{\partial B}$ 等于零，我們就得到 A 与 B 的值：$A=1$, $B=-\frac{3}{16}$；而且在这些值处只可能有極小，由此应得：

$$P(x)=x-\frac{3}{16}.$$

例 5. 作綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使积分

$$=\int_0^1[x^2-P(x)]^2dx$$

为極小.

这时

$$I=\int_0^1 (x^2-Ax+B)^2\,dx=\frac{1}{3}A^2+AB+B^2-\frac{1}{2}A-\frac{2}{3}B+\frac{1}{5}.$$

令它的导数

$$\frac{\partial I}{\partial A}=\frac{2}{3}A+B-\frac{1}{2}\qquad 和 \qquad \frac{\partial I}{\partial B}=A+2B-\frac{2}{3}$$

为零，就可得到

$$A=1,\qquad B=\frac{1}{6},$$

于是

$$P(x)=x-\frac{1}{6}.$$

例 6. 作綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使表达式

$$E=\max_{0\leq x\leq 1}|x^2-P(x)|$$

(即是抛物綫与直綫縱坐标的差的最大絕对值)尽可能地小.

因为数量 $|x^2-P(x)|$ 在区間端点上取値 $-B$ 和 $1-A-B$，而在区間內有極大値 $\frac{A^2}{4}+B$，則 E 显然就等于三数

$$-B,\qquad 1-A-B \qquad 和 \qquad \frac{A^2}{4}+B$$

中的最大者. 不难看到，这些数中最大的只有当它們彼此相等时

$$-B=1-A-B=\frac{A^2}{4}+B$$

才有最小値，而这就給出：$A=1$，$B=-\frac{1}{8}$，因此

$$P(x)=x-\frac{1}{8}.$$

例 7. 作一次多項式 $P(x)$ 逼近函数 $f(x)=2^x$，使得积分

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-f(x)]^2dx$$

有最小値.

答：
$$2^x\approx\frac{3}{4}\left[\left(\frac{5}{\lg 2}-\frac{3}{\lg^2 2}\right)x+\frac{1}{\lg 2}\right]\approx 0.727x+1.082.$$

例 8. 用一次多項式来逼近上題中的函数，使得値 $\max\limits_{|x|\leq 1}|P(x)-f(x)|$ 尽可能地小.

答：
$$2^x\approx\frac{3}{4}\left(x+\frac{1+\frac{11}{3}\lg 2-\lg 3+\lg\lg 2}{2\lg 2}\right)\approx 0.750x+1.123.$$

例 9. 用多項式 $P(x)=Ax^2+B$ 来逼近函数 $f(x)=\cos x$，使得积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}[P(x)-f(x)]^2dx$$

尽可能地小.

答：　$\cos x \approx \frac{180}{\pi^3}\left[-\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{3}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\,\frac{\pi^2}{4}\right)\right] \approx -0.418x^2+0.980.$

例 10. 用三角多項式 $T(x)=A\cos x+B$ 来逼近函数，使得偏差 $|T(x)-f(x)|$ 的極大値（在整个实軸上）尽可能地小.

令 $\cos x=X$，則可斷定：表达式 $|A\cos x+B-2^{\cos x}|$（在整个实軸上）的極大値与表达式 $|AX+B-2^X|$（在 $|X|\leqslant 1$ 时）的極大値相等．而在这种情况下，我們又得到了例 8 的条件，而 A 与 B 就与例 8 中所写出的相同.

在以下几节中，我們認为讀者有必要来回忆一下在代数、三角和函数論中某些已熟知的东西，并引进某些名詞和符号.

2. 函数論中的必要知識　当需要将經驗函数的关系写成公式的形状时，函数表写的問題就自然地被提出来了；这个經驗函数的关系可能是用表格或圖形給出来的．然而，如果以为函数表写的問題完全是在这些情况下被提出来的，那就錯了．事实上不仅在沒有公式的时候需要适于运用的公式，而且即使有了公式，但这公式較为复杂，因而由于某种原因用起来比較困难，我們也要求提出适于运用的公式．关于这一点，可以回想一下那些"积不出"的积分；那些由不能解出因变数的方程所給出的隐函数；还有那些由微分方程和初始条件所給出的函数，这时解的存在性与唯一性是由初始条件所保証.

我們有充分的根据只研究基本区間上的連續函数，如果对于任意小的 $\varepsilon(>0)$，总可以有这样的 $\delta[>0;\ \delta=\delta(\varepsilon, x_0)]$，使得从 $|x-x_0|<\delta$，便得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，則函数称作在点 $x=x_0$ 处連續（哥西的定义）．如果它在一个区間的一切点处都連續，則称函数在这一区間上連續．若一函数在一有限閉区間上連續，則它必为有界，而且一致連續（康托的定理）．所謂一致連續就是：对于任意小的 $\varepsilon(>0)$，总可以有这样的 $\delta[>0;\ \delta=\delta(\varepsilon)]$，使得对于一切滿足不等式 $|x'-x''|<\delta$ 的値 x' 与 x''，不論它們位于区間中的何处，不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 总成立.

在基本区間 I 上一致連續的一切函数都有連續模 $\omega(\delta)$ 与之对应，当 x' 和 x'' 彼此無关地取遍区間 I 上一切可能的値且滿足不等式 $|x'-x''|\leqslant\delta$ 时，$\omega(\delta)$ 定义为表达式 $|f(x')-f(x'')|$ 的上确界．連續模 $\omega(\delta)$ 是 $\delta(\delta>0)$ 的連續不減函数，并具有以下的性質

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0. \tag{8}$$

我們将集中注意于在基本区間 I 上并且其連續模 $\omega(\delta)$ 滿足不等式

$$\omega(\delta)\leqslant\omega^*(\delta) \tag{9}$$

的一致連續函数，其中 $\omega^*(\delta)$ 是 δ 的已知的固定函数 $(\delta>0,\ \omega^*(\delta)>0)$；所有这些函

数构成一类，而为 I 上一致連續函数类的子类．我們要特别提出下列的重要情况：

1. $\omega^*(\delta)=K\delta$，其中 K 是适当选取的正数．所得到的不等式

$$\omega(\delta)\leqslant K\delta \tag{10}$$

称为里卜希兹条件．特别是在函数 $f(x)$ 在区間 I 上有导数，而这导数的絕对値又不超过 K 时，这条件就能成立．

2. 不等式

$$\omega(\delta)\leqslant K\delta^{\alpha} \qquad (0<\alpha<1;\ K>0) \tag{11}$$

是广义的 α 級的里卜希兹条件．α 愈小时滿足不等式(11)的函数类就愈寬．这里含有一切具有有界导数的函数(它們也滿足普通里卜希兹条件)，但在这类中也可能有这样情况，即

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=\infty。 \tag{12}$$

3. 关系式

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\lg\frac{1}{\delta}=0 \tag{13}$$

称为狄尼条件．它定义出連續函数中極广的一类，它包含了滿足任意級广义里卜希兹条件的函数类．

在基本区間上可微分的函数类比連續函数类較窄．这是由于函数 $f(x)$ 若不在某点連續就不能在那点有导数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{14}$$

而在一点上为連續的函数，在該点也可能沒有导数存在．

如果需要所考虑的函数的导数是連續的或者滿足某級的里卜希兹条件等等，就会得到更窄的函数类．如果在基本区間(有限閉区間)上导数連續，則函数滿足1級里卜希兹条件．还可以假設二級导数、三級导数等等存在，也可在所設最后級的导数上附加一些补充条件．

現在設想無限可微分的函数类，即是具有一切級导数的函数类．各級导数均連續，且在有限閉区間上滿足1級里卜希兹条件；因为这时它是有界的，故在某点处达到最大模 M_n：

$$M_n=\max|f^{(n)}(x)|.$$

由于各級导数存在，对于基本区間中任意点 x_0，可以写出泰乐級数的形式展开式

$$f(x)\sim f(x_0)+\sum_{m=1}^{\infty}f^{(m)}(x_0)\frac{(x-x_0)^m}{m!}. \tag{15}$$

但是目前所作的假設完全不能保証級数(15)在任意一点 $x(\neq x_0)$ 上的收斂性。級数(15)是一个冪級数，因此与所有的冪級数(按照 $(x-x_0)$ 的升冪展开的)一样，只要它在 $x=x^*(\neq x_0)$ 时收斂，則当

$$|x-x_0|<|x^*-x_0|$$

时它絕对收斂，而且对于任意的 $\rho<|x^*-x_0|$，它在 $|x-x_0|\leqslant\rho$ 时一致收斂。若可以指出这样的 $\rho\equiv\rho(x_0)(>0)$，使得当 $|x-x_0|<\rho$ 时泰乐級数(15)收斂，而且其和等于 $f(x)$，則函数称为在 $x=x_0$ 处解析或正則；如果函数 $f(x)$ 在一区間(有限或無限，閉的或不閉的)的每一点是解析的，則称 $f(x)$ 在这区間上是解析的或正則的。

在 $x=x^*$ 时，公式(15)右端收斂的冪級数，不仅对满足不等式 $|x-x_0|<|x^*-x_0|$ 的一切实值 x 收斂，而且对满足这个不等式的一切复值 x 也收斂，并且在任何圓 $|x-x_0|\leqslant\rho$ 內，收斂是一致的，其中 $0<\rho<|x^*-x_0|$；这样就可以把在某实数区間上的实解析函数"开拓"到包含此区間的某复数区域上去；对于非解析函数，这种开拓是不可能的。因此在逐漸縮小实变函数类时，自然地就会引进复变数。

若对一复数区域中的每一个值 z，都对应一确定的值 $f(z)$，就說在这区域中給出了复变数 z 的一个函数 $f(z)$。这里复数区域指的是具备下述两条件的复变数 z 的值集合("区域")(D)：1) 圍着区域 (D) 中任一点可以作一圓，使圓內的所有点都屬于 (D) (二維性)；2) (D) 中任意两点可以用一簡单曲綫(所謂若当曲綫)联結起来，而使这曲綫上的所有点都屬于 (D) (連通性)。这样，例如位于簡单閉曲綫內的点集具备上述性質。对于在区域 (D) 上所給出的复变函数 $f(z)$，只要能找出这样的冪級数

$$c_0+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(z-z_0)^m, \tag{16}$$

其中 $c_m(m=0,1,2,\cdots)$ 是实数或复数，并找得这样的正数 ρ，使得对于 (D) 中所有满足不等式 $|z-z_0|<\rho$ 的 z 值，級数(16)收斂，而且以 $f(z)$ 为和，这就是說，只要函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 附近能展成冪級数(16)，則称 $f(z)$ 在該点解析或正則；若一函数在区域 (D) 的每一点上都是解析的，則称此函数在这区域中解析或正則。这个定义与上面所引用的不相矛盾；只消指出在定义本身中，区域 (D) 的性質 1) 起着重要的作用，即令有时也談到在并不具备这一性質的在一区域上的解析函数(例如在上述在实軸某区間上的解析函数)，那末也总可以利用冪級数展开式把它开拓到具有性質1)的区域上去。因此如果函数 $f(z)$ 特別是在实軸的区間 $a\leqslant z\leqslant b$ 上正則，那么它就在圍着此区間的某个二維区域 (D) 上也正則(圖 2)；如果函数 $f(z)$ 在圓 $|z-z_0|\leqslant\rho(\rho>0)$ 上正

則，那么在某一圓 $|z-z_0|<\rho'$ 內也正則[1)]，其中 $\rho'>\rho$.

若具有任意系数 c_m 的冪級数(16)，对于某值 $z=z^*(z^*\neq z_0)$ 收斂，但不是对于所有的值 z 都收斂，那么存在着一正数 R，称为級数(16)的收斂半徑，具有以下的性質：1°．級数(16)在以 z_0 为中心 R 为半徑的收斂圓內收斂，亦即，当 $|z-z_0|<R$ 时收斂，2°．在这圓外，即当 $|z-z_0|>R$ 时，級数發散．若級数(16)对于所有 z 值都收斂，那么形式地令 $R=\infty$．在收斂圓內的任一閉区域[2)]上級数(16)一致收斂．收斂半徑可用冪級数的系数按照公式

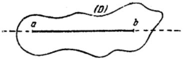


圖 2

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$$

表出．进一步还能够断言，在收斂圓內，級数(16)可以逐項微分．特別，把恒等式

$$f(z)=c_0+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(z-z_0)^m \quad (|z-z_0|<R) \tag{17}$$

逐次微分并逐次代入 $z=z_0$，就得出：

$$c_0=f(z_0), \quad c_m=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \quad (m=1,2,\cdots),$$

这就是說，冪級数就是其和函数的泰乐級数．由此順便推得，若在某圓內冪級数的和恒等于零，則其一切的系数都等于零，更一般地說来，若在某圓內以 $z-z_0$ 的冪展开的两冪級数有相同的和，那么它們的系数分別相等．

若 $f(z_0)=0$，(D 中的)点 $z=z_0$ 就称为 (D) 中正則函数 $f(z)$ 的零点．若 $f'(z_0)\neq 0$，z_0 就称为单零点(一重的)；一般說来，若 $f'(z_0)=\cdots=f^{(s-1)}(z_0)=0$，$f^{(s)}(z_0)\neq 0$，$z_0$ 就称为 s 重的零点(s 为正整数)．若 z_0 是 s 重的零点，則 $f(z)$ 可以写作：

$$f(z)=(z-z_0)^s\varphi(z),$$

这里 $\varphi(z)$ 在点 $z=z_0$ 处正則，且在該处不等于零．

我們还要提出，正則函数的与其冪級数展开式有关的以下性質：在区域(D)中，正則函数 $f(z)$ 的零点是孤立点；这就是說，若 $f(z_0)=0$(z_0 在区域(D)中)而 $f(z)\not\equiv 0$，

1) 最后这一点需要加以說明．从函数 $f(z)$ 在圓周上[即是在 $|z-z_0|=\rho$ 的点处]的正則性，直接只能推得以这个圓周上的每一点作中心可作一圓，而在这圓內函数是正則的．为了要断定 $f(z)$ 在半徑 $\rho'>\rho$ 的某圓內是正則的，还須証明：对于在原来圓周上各別点处所对应的一切圓，其最大半徑有下界 $\sigma>0$．然而由于圓周点集的閉合性（参看下一說明），所求下界确乎在圓周上某一点 z' 处达到，即存在这样的点 z'，$|z'-z_0|=\rho$，使 $f(z)$ 在圓 $|z-z'|<\sigma$ 內正則，而在圓 $|z-z'|<\sigma'$ 內已經不正則了，其中 $\sigma'>\sigma$．由此应得的确 $\sigma>0$，因为在相反的情况下，$f(z)$ 在 z' 处就不是正則的，而与假定相矛盾．

2) 平面上的一点集如包含其一切極限点則称为閉集．

則存在着这样的数 $\rho(>0)$，使当 $|z-z_0|<\rho$, $z\neq z_0$ 时，$f(z)\neq 0$。

研究在任何点处都不正則的复变函数沒有很大意义。若談到解析函数而未指出正則区域，則仍然認为这个区域是存在的。在整个平面上的正則函数称为整函数；整函数可展成具無穷大收斂半徑的冪級数。解析函数在某些点不正則时，这些点称为奇异点，奇异点可以是孤立地分布着，或塡滿整条曲綫，甚至塡滿整个区域：在任何情况下，奇异点的集合总是閉的。最簡单类型的奇异点是極点；如果 $f(z)$ 可以写成

$$f(z)=(z-z_0)^{-s}\varphi(z),$$

而 $\varphi(z)$ 在 z_0 处是正則的且不为零，那么 $z=z_0$ 称为函数 $f(z)$ 的 s 重極点（s 是正整数）。展开 $\varphi(z)$ 成 $z-z_0$ 的冪級数，我們还可得到函数 $f(z)$ 的下一表达式：

$$f(z)=\sum_{m=1}^{s}\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m(z-z_0)^m \qquad (c_{-s}\neq 0).$$

这里第一个和数称为函数在 z_0 附近的主要部分，而第二个和数称为函数在 z_0 附近的正則部分；系数 c_{-1} 称为殘数。在某区域中除了極点外無其他奇异点的函数，称为在这区域中的半純函数。

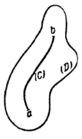


圖 3

若复变函数 $f(z)$ 在某区域中連續，又在区域 (D) 中給出联結点 a 与 b 的一曲綫 (C)（圖 3），那么可以定义函数 $f(z)$ 沿曲綫 (C) 所取的积分为下列和数的極限：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{(C)}f(z)\,dz=\lim\sum_{m=0}^{n-1}f(z_m)\Delta z_m,\\&\Delta z_m=z_{m+1}-z_m,\ z_0=a,\ z_n=b,\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

其中点 z_m 是依指标順序沿着曲綫 (C) 的一定方向而排列的，而極限过程則了解为所有差数 Δz_m 的模一致趋于零时的極限。

下述不等式指出了怎样找出积分模的上界，

$$\left|\int_{(C)}f(z)dz\right|\leqslant\lim\left|\sum_{m=0}^{n-1}f(z_m)\Delta z_m\right|\leqslant\lim\sum_{m=0}^{n-1}|f(z_m)|\cdot|\Delta z_m|=$$

$$=\int_{(C)}|f(z)|\,ds\leqslant LM;$$

这里积分元素 ds 是指沿弧积分的，L 是弧长，而 M 是函数 $f(z)$ 在这弧上的最大模。注意到这点并引入（像实数范圍时一样）函数 $f(z)$ 的連續模 $\omega(\delta)$ 概念，就很容易估計积分(18)用它的近似和代替时的誤差：

$$\left|\int_{(C)} f(z)dz - \sum_{m=0}^{n-1} f(z_m)\Delta z_m\right| = \left|\sum_{m=0}^{n-1}\int_{z_m}^{z_{m+1}} [f(z)-f(z_m)]\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta)\sum_{m=0}^{n-1}|z_{m+1}-z_m| \leqslant \omega(\delta)L, \tag{19}$$

其中 δ 是数 $|\Delta z_m|$ $(m=0, 1, \cdots, n-1)$ 中的最大者.

假設区域 (D) 具备性質 1) 和 2)，并且还具备性質 3)：若某一簡单閉曲綫 (C) 屬于 (D)，那么在 (C) 內的全部点也屬于 (D)（单連通性質）. 这时若函数 $f(z)$ 在 (D) 內正則，則沿任一屬于 (D) 內的閉曲綫 (C) 上的积分等于零：

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0$$

（哥西定理）. 換句話說，沿屬于 (D) 的任意曲綫 (C) 上的积分只依賴于积分道路的起点与終点；另一方面，沿閉曲綫 (C_1) 的积分等于沿閉曲綫 (C_2) 的积分，其中 (C_2) 包圍着 (C_1)，或者 (C_1) 包圍着 (C_2)，只要在曲綫 (C_1) 和 (C_2) 之間的区域上包括此两曲綫在內，积分号下的函数是正則的.

注意沿閉曲綫 (C) 的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{dz}{(z-z_0)^s} \qquad (s \text{ 是正整数})$$

当 $s=1$ 同时閉曲綫 (C) 包圍着点 z_0 时等于 1，在其余的情況下，积分等于零，我們提出哥西定理的下一推广：若函数 $f(z)$ 在区域 (D) 中半純，則沿簡单閉曲綫所取的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)dz$$

就等于函数包圍在这积分曲綫 (C) 中所有極点上的殘数之和. 特別，若 $f(z)$ 在区域 (D) 中半純，則它的对数导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 同样也是半純的，于是得到公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \tag{20}$$

其中 N 是函数 $f(z)$ 包圍在曲綫 (C) 內的零点数，而 P 是極点数（零点与極点都按相重数計算，这就是說，s 重零点或極点算作 s 个零点或極点）.

若已知 $f(z)$ 在区域 (D) 中正則，則 $P=0$，而 (20) 左端的积分等于 N，即函数 $f(z)$ 在閉路 (C) 內部的零点数（按重数計算）.

假定函数 $f(z)$ 在由簡单閉路 (C) 所包圍的区域內及在曲綫 (C) 上正則，則（这是解析函数的重要性質）函数 $f(z)$ 在区域 (D) 內的値可以借哥西积分而用 $f(z)$ 在

閉路 (C) 上的值表示如下：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{21}$$

用这公式就能把最簡单的有理函数 $\frac{1}{\zeta-z}$ 的各种性質推广到任意的正則函数上来。例如从它可以得到下述命題：若函数 $f(z)$ 在以 z_0 为中心、R 为半徑的圓內正則，則在圓內它可以依 $z-z_0$ 的冪展开成泰乐級数。因此，函数 $f(z)$ 在 z_0 附近的泰乐展开式的收斂半徑等于这点到最近的函数的奇异点的距离。特别，整函数的泰乐展开式的收斂半徑等于無穷大，即是对于变数的一切值，展开式都收斂。

泰乐展开式的推广是按 $z-z_0$ 的整（正的以及負的）冪展开的罗朗展开式：若函数 $f(z)$ 在由以 z_0 为圓心、以 R 和 r $(0<r<R<\infty)$ 为半徑的两同心圓 (C) 和 (c) 所圍成的圓环 (D) 中正則，則在这环內，它可以展开成下形的罗朗級数

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m(z-z_0)^m. \tag{22}$$

在包含在环 (D) 內部的任意閉曲域上，其收斂是一致的。順便应該提出三角級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos mz+b_m\sin mz)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_me^{imz},$$

$$c_0=a_0,\qquad c_m=\frac{a_m-ib_m}{2},\qquad c_{-m}=\frac{a_m+ib_m}{2}\qquad (m=1,2,\cdots)$$

与罗朗級数之間的联系：用代换 $e^{iz}=Z$ 便把三角級数变为罗朗級数。因为一般說来，罗朗級数的收斂区域是某一环域 $r<|Z|<R$，其中 r 和 R 由公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},\qquad r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

确定［而且收斂性可在周界 $|Z|=R$ 和 $|Z|=r$ 上成立］，所以一般三角級数在带形 $\alpha<\Im z<\beta$[1] 中收斂，此带形是由平行于实軸的二直綫 $(\alpha=-\lg R,\beta=-\lg r)$ 所形成的（而且三角級数在直綫 $\Im z=\alpha$ 和 $\Im z=\beta$ 上并不一定不收斂）。在带形范圍內所有的閉区域上，收斂性是一致的。系数 a_m 和 b_m 为实数的情况特别重要：此时 c_m 和 c_{-m} 互为共軛，由此得到 $rR=1$，$\beta=-\alpha$，而三角級数的收斂带就对实軸对称；我們也不除掉極限情况 $r=R=1$ 和 $\alpha=\beta=0$，此时三角級数可能只对于变数的实值才收斂。

維尔斯德拉斯定理也是哥西积分的一个推論：若在区域 (D) 中正則的函数序列

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots$$

1) 我們用 $\Re z$ 与 $\Im z$ 表示复数的实数部分和虛数部分，也就是 $z=\Re z+i\Im z$.

在这区域中一致收敛，则極限函数

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

也在 (D) 中正則．換句話說：正則函数的一致收斂級数的和仍是正則函数．在复数区域[这里二維性1)極为重要]中，一致收斂級数可以逐項微分和逐項积分．

用各种方法（可以用哥西积分或者不用哥西积分）可以証明所謂“最大模原理”：若在区域 (D) 中正則的函数 $f(z)$ 不恒等于常数，而区域 (D) 具备上述性質 1)—3)，且（我們多假設一点）(D) 由閉路 (C) 所圍成，而函数 $f(z)$ 在曲綫 (C) 上也正則，則若有一点 z_0，在該点处模 $|f(z)|$ 所取的值不小于在閉区域 $(D)+(C)$ 上任何其他点 z 处所取的值时：

$$|f(z_0)|\geqslant|f(z)|,$$

这种点 z_0 必在閉路 (C) 上．

最大模原理还有以下的推广：即是 $f(z)$ 在閉路 (C) 上的正則性可以换成 $f(z)$ 在閉集合 $(D)+(C)$ 上連續就够了．

以后(第 54 节)我們会要用到在無限远点处函数正則性的概念，或在包含無限远点的区域上函数正則性的概念．我們假定讀者已熟悉这些概念．

3. 多項式零点的个数与分布　多項式：通常多項式

$$P(z)=\sum_{m=0}^{n} c_m z^m \tag{23}$$

与三角多項式

$$T(z)=\sum_{m=0}^{n}(a_m\cos mz+b_m\sin mz)=\sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imz}$$

$$\left(c_m=\frac{a_m-ib_m}{2},\quad c_{-m}=\frac{a_m+ib_m}{2};\quad m=1,2,3,\cdots\right) \tag{24}$$

是最簡单的整函数，即是最簡单的在整个平面上正則的函数，而用它們来表写其他函数最为方便．应該較詳尽地討論它們的性質，特别是它們的零点的个数与分布．

回到公式(20)，在其中令 $f(z)=P(z)$．于是得到：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{P'(z)}{P(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{nc_nz^{n-1}+\cdots}{c_nz^n+\cdots}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\left(\frac{n}{z}+\cdots\right)dz, \tag{25}$$

若設想 (C) 是(例如)以坐标原点为中心、以無限增加的 R 为半徑的圓，則从前面的公式中我們看到(在 $c_n\neq 0$ 这一条件下) n 次多項式的零点个数恰好等于 n（代数基本定理）．事实上，在等式(25)內积分号下的和中，写出来的一項其积分等于 n，而沒有

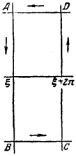


圖 4

写出的項是分母的次数至少比分子的次数高两次的分式，因此当 R 無限增加时，这項的积分趋于零；但因这积分只能取整数值，所以它从某个时候起就变成等于零了。

类似地可以断定形如(24)的任意 n 次三角多項式 $T(z)$ 在 $a_n+ib_n \neq 0$, $a_n-ib_n \neq 0$ 这一条件下，在周期 $\xi \leqslant \Re z < \xi+2\pi$ [1] 中恰有 $2n$ 个零点。为了証明起見，考虑沿着以 $A(\xi+i\eta)$, $B(\xi-i\eta)$, $C(\xi+2\pi-i\eta)$ 和 $D(\xi+2\pi+i\eta)$ 为頂点的矩形閉路 (C)（圖 4）上的积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{T'(z)}{T(z)}dz.$$

由于 $T(z)$ 的周期性，沿平行于虛軸的直綫 AB 和 CD 上的积分互相抵消了。至于沿綫段 DA 的积分，則在計标它时注意积分号下的函数可以表为

$$\frac{T'(z)}{T(z)}=n\cdot\frac{-a_n\operatorname{tg}nz+b_n+\cdots}{a_n+b_n\operatorname{tg}nz+\cdots}\qquad(z=x+i\eta),$$

而当 $\eta\to\infty$ 时，在 a_n+ib_n 不等于零这一假定下，这函数一致地（对于 x）趋于極限：

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{T'(z)}{T(z)}=-in\ ^{2)}.$$

由此可見，

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{DA}\frac{T'(z)}{T(z)}dz=n;$$

类似地，在 $a_n-ib_n \neq 0$ 这一条件下，有

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{BC}\frac{T'(z)}{T(z)}dz=n,$$

因此所求的零点数等于

$$\lim_{\eta\to\infty}I=2n.$$

上述論断也可作为代数基本定理的推論而推得。事实上，令 $e^{iz}=Z$，从公式(24)就得到：

$$T(z)=\sum_{m=-n}^{+n}c_mZ^m=Z^{-n}P(Z),\tag{26}$$

其中 $P(Z)$ 是 Z 的 $2n$ 次通常多項式，按照假設，它的最高項系数与最低項系数（c_n 与 c_{-n}）都不为零。設 $Z_k(k=1,2,\cdots,2n)$ 是方程 $P(Z)=0$ 的根。則 $T(z)$ 的零点就是

1) 数 ξ 是任意的，但只受唯一的限制：在直綫 $\Re z=\xi$ 上多項式 $T(z)$ 沒有零点。

2) 事实上，只要注意 $\lim\limits_{\Im Z\to\infty}\operatorname{tg}Z=i$ 对 $\Re Z$ 一致成立，以及当 $0<m<n$ 时，$\lim\limits_{\Im Z\to\infty}\frac{\sin mZ}{\cos nZ}=\lim\limits_{\Im Z\to\infty}\frac{\cos mZ}{\cos nZ}=0$ 也对 $\Re Z$ 一致成立。

方程

$$e^{iz}=Z_k \qquad (k=1,2,\cdots,2n)$$

的根。既然 Z_k 中任一个都不等于零，则在区域 $\xi\leqslant\Re z\leqslant\xi+2\pi$ 中每一个这种方程都有一个且仅一个根。

注意，$a_n\pm ib_n\neq0$ 这一假設非常重要：如果这假定不成立，则三角多項式的零点数就要减少。例如一次三角多項式

$$T(z)=\cos z+i\sin z(=e^{iz})$$

就根本沒有零点[1]。

然而，任一实的（恰好）n 次的三角多項式在周期内恒有 $2n$ 个零点；事实上，在这种情况下，数 a_n 与 b_n 中至少有一个不为零，因而数 a_n+ib_n 与 a_n-ib_n 就不等于零。

注意下一表述很有益处：若一通常的（或三角的）n 次多項式有 $n+1$ 个（或 $2n+1$ 个）零点，那么它就恒等于零。对于通常多項式从前述可以很清楚地看到这一点，对于三角多項式可从公式(26)推得。換个說法：若两个通常的（三角的）n 次多項式在 $n+1$ 个点（或 $2n+1$ 个点）处彼此相等，则它們恒等。

我們要提出用零点来表示多項式的問題。大家熟知，n 次通常多項式 $P(z)$ 除一个常数因子外，由其 n 个零点 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 所确定：

$$P(z)=A(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n);$$

这里因子 A 不是别的，恰是多項式 $P(z)$ 最高項的系数。现在来討論（恰好）n 次的三角多項式 $T(z)$；若已經知道它在周期范圍 $\xi\leqslant\Re z\leqslant\xi+2\pi$ 中的零点，要求找到它的最一般的形状。設这些零点是 $z_k(k=1,2,\cdots,m;\ 0\leqslant m\leqslant 2n)$。恒等式

$$T(z)=Z^{-n}P(Z)\quad (Z=e^{iz})$$

說明 $2n$ 次多項式 $P(Z)$（最低項系数 c_{-n} 和最高項系数 c_n 中，至少有一个必须不为零）当 $Z=e^{iz_k}(k=1,2,\cdots,m)$ 时等于零，而对于其他的 Z 值（可能的值 $Z=0$ 不計）不为零，因为从 $P(Z)=0$ 就会有

$$T\left(\frac{1}{i}\lg Z\right)=0.$$

由此得到 $P(Z)$ 之形为

$$P(Z)=C\prod_{k=1}^{m}(Z-e^{iz_k})$$

或

1) 我們把零点个数减少的现象称为"畢卡例外情形"。順便注意，两个三角多項式的乘积的次数并不总是等于次数相加。例如

$$(1-\cos z-i\sin z)(1+\cos z-i\sin z)=-2i\sin z.$$

$$P(Z)=CZ^{2n-m}\prod_{k=1}^{m}(Z-e^{iz_k}),$$

其中C是不为零的任意常数系数。这时我們的三角多項式 $T(z)$ 就由下列公式之一給出：

$$T(z)=Ce^{-inz}\prod_{k=1}^{m}(e^{iz}-e^{iz_k}) \tag{27}$$

或

$$T(z)=Ce^{i(n-m)z}\prod_{k=1}^{m}(e^{iz}-e^{iz_k}). \tag{28}$$

$m=2n$ 的情况对于我們特别有意义；在这情况下，两公式合成一个：

$$T(z)=Ce^{-inz}\prod_{k=1}^{2n}(e^{iz}-e^{iz_k});$$

引用三角函数，这公式可更方便地重写如下：

$$T(z)=A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{z-z_k}{2}, \tag{29}$$

其中 A 是一个新的常数。

我們来考虑常数 A 是怎样与三角多項式 $T(z)$ 的系数相关联的。为此，我們把公式(29)右端的乘积变换如下：两两集結因子，就得到：

$$\sin\frac{z-z_h}{2}\sin\frac{z-z_{n+h}}{2}=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(z-\frac{z_h+z_{n+h}}{2}\right)-\cos\frac{z_h-z_{n+h}}{2}\right],$$

結果乘积化为

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{h=1}^{n}[\cos(z-\zeta_h)-\cos\zeta_h'];\quad \zeta_h=\frac{z_h+z_{n+h}}{2},\quad \zeta_h'=\frac{z_h-z_{n+h}}{2}.$$

进一步相乘，集中注意于由各被减数构成的項。可以将乘积写成

$$\prod_{h=1}^{n}\cos(z-\zeta_h)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(nz-\sum_{h=1}^{n}\zeta_h\right)+\cdots,$$

其中未写出的項是次数低于 n 的三角多項式。此后恒等式(29)就成为

$$T(z)=A\cdot\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}[\cos(nz-\zeta)+\cdots],\qquad \zeta=\sum_{h=1}^{n}\zeta_h=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}z_k; \tag{30}$$

在公式(24)与(30)中，比較 $\cos nz$ 与 $\sin nz$ 的系数，就得到以下的等式

$$A\cos\zeta=(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot a_n,$$

$$A\sin\zeta=(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot b_n,$$

由此推得

$$A=\pm 2^{2n-1}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\tag{31}$$

与

$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{b_n}{a_n}.\tag{32}$$

在公式(31)中,当然根式有两个值,这是完全自然的,因为在公式(29)中出現有半角的緣故,乘积的符号要看零点 z_k 取在怎样的周期带中而定.

因子 A 的值可以用别的推理来确定. 置恒等式(24)与(29)的右端相等, 設 z 是純虛数: $z=iy$, 并假定 y 無限增加 ($y\to\infty$), 比較所得等式左端和右端的漸近值[1]; 移項并約去 e^{ny} 后 $\left(\text{如前令 } \zeta=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}z_k\right)$, 便得

$$Ae^{i\zeta}=(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot(a_n+ib_n);$$

同样,令 y 趋于 $-\infty$, 就有

$$Ae^{-i\zeta}=(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot(a_n-ib_n),$$

从以上关系式又推得等式(31)和(32).

回到公式(29),我們注意它的两个重要的特殊情况:

1) 設多項式的零点是对原点 $z=0$ 对称地分布的. 設这些零点是

$$\pm z_1,\ \pm z_2,\ \cdots,\ \pm z_n.$$

那么把因子两两集結,就得到

$$T(z)=A\prod_{k=1}^{n}\frac{\cos z_k-\cos z}{2},$$

或者

$$T(z)=B\prod_{k=1}^{n}(\cos z-\cos z_k),\tag{33}$$

其中

$$B=2^{n-1}\cdot a_n{}^{2)},\tag{34}$$

而且这时 $\zeta=0,\ b_n=0$.

2) 設多項式的零点对点 $z=\pi$ 对称地分布. 設这些零点是 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 和 $\pi-z_1, \pi-z_2, \cdots, \pi-z_n$. 則我們得到:

1) 很明显,例如,当 $y\to\infty$ 时:

$$\sin\frac{iy-z_k}{2}\sim\frac{i}{2}e^{(y+iz_k)/2};\quad \cos miy\sim\frac{1}{2}e^{my};\quad \sin miy\sim\frac{i}{2}e^{my}.$$

2) 与公式(31)相反,在公式(34)—(36)中,不难直接驗証符号完全是确定的.

$$T(z)=A\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin z_k-\sin z}{2},$$

或者

$$T(z)=C\prod_{k=1}^{n}(\sin z-\sin z_k),$$

而 $\zeta=\frac{n\pi}{2}$，并且在 n 是偶数时，$b_n=0$，且

$$C=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{n-1}\cdot a_n{}^{1)}, \tag{35}$$

而在 n 为奇数时，$a_n=0$，且

$$C=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\cdot b_n. \tag{36}$$

附注　所有以上的叙述和証明很容易推广到多項式的某些零点是重零点的情况．

由前可知，多項式（通常多項式——在平面上，三角多項式——在周期带中）零点的分布一般說来是不受任何限制的．但我們来討論实多項式的情况，即具有实系数的多項式的情况．在这种情况下可以断言：复零点是成对地共軛出現的（相重数計算在內）．我們来回忆一下这个初等定理的証明．規定用 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛数，則 $\overline{P}(z)$ 就表示从 $P(z)$ 中将 z 换成 $\bar{z}$ 同时把多項式 $P(z)$ 的所有的系数换成它們的共軛数而得来的多項式．如果所有的系数是实的，則显然

$$\overline{P(z)}=P(\bar{z}). \tag{37}$$

設 z_0 是多項式 $P(z)$ 的零点，所以

$$P(z_0)=0.$$

于是 $\overline{P(z_0)}=0$，将 $z=z_0$ 代入等式(37)中便得

$$P(\bar{z}_0)=0,$$

这就是所需証明的．这个推理也可运用到三角多項式上去，只要注意到

$$\overline{\cos z}=\cos\bar{z},\qquad \overline{\sin z}=\sin\bar{z}.$$

4. 契比謝夫多項式　在函数逼近理論中，由杰出的俄国数学家 П. Л. 契比謝夫[2]所提出的多項式系起着很大的作用．立刻向讀者介紹一下这些多項式及其某些重要性質，这将是很适宜的．

契比謝夫多項式就是

$$T_n(x)=\cos n\arccos x\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{38}$$

出乎意料以外，这个写出的表达式对于任何正整数 n 是一 n 次通常多項式，然而却不

1) 見上頁底注 2).

2) "Теория механизмов, известных под названием параллелограмов". *Сочинения*, 卷 II, 第23—51頁.

难証明真是如此。事实上，直接运用倍角余弦的三角多項式，就得出：

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= \cos\ \arccos x = x, \\ T_2(x) &= \cos 2\arccos x = 2x^2-1, \\ T_3(x) &= \cos 3\arccos x = 4x^3-3x, \\ T_4(x) &= \cos 4\arccos x = 8x^4-8x^2+1, \\ T_5(x) &= \cos 5\arccos x = 16x^5-20x^3+5x, \end{aligned} \tag{39}$$

等等.

在任意 n 的情况下，作代换

$$x=\cos\theta, \qquad \sqrt{1-x^2}=\sin\theta;$$

于是我們得到：

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n],$$

所以(回到变数 x)

$$T_n(x)=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n]. \tag{40}$$

当按照二項公式乘开来时，根号消去了，我們就得到

$$T_n(x)=x^n+C_n^2x^{n-2}(x^2-1)+C_n^4x^{n-4}(x^2-1)^2+\cdots.$$

这样，函数 $T_n(x)$ 的确是 n 次多項式．x^n 的系数可用公式(40)直接地算出来

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n(x)}{x^n}=2^{n-1}. \tag{41}$$

由恒等式

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$$

推得下面的遞推关系式：

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots), \tag{42}$$

用它可很方便地一个一个地計算契比謝夫多項式.

契比謝夫多項式 $T_n(x)$ 的所有的零点是实单零点，且包含在区間 $-1<x<+1$ 中．显然这些零点可由公式

$$x_m^{(n)}=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n} \qquad (m=1,2,\cdots,n) \tag{43}$$

給出.

为了用圖形将 $T_n(x)$ 的零点作出来，只要以区間 $(-1,+1)$ 为直徑作半圓，将半圓分成 $2n$ 份，

从右到左記出分点，然后将奇数指标的分点投影到基本区間上．很容易明白，多項式 $T_n(x)$ 的零点不是均匀地分布在基本区間上，而是密集在两端(圖 5)．

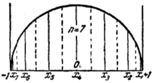


圖　5

为了更清楚起見，借用概率論的思想，导出当 n 無限增大时多項式 $T_n(x)$ 的零点的分布規律．設 $N_n(\alpha,\beta)$ 是 $T_n(x)$ 在区間 $\alpha\leqslant x<\beta(-1\leqslant\alpha<\beta\leqslant+1)$ 中的零点个数．則二重極限

$$\psi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(x,x+\Delta x)}{n}$$

自然地称作 $T_n(x)$ 的零点在点 $x(-1<x<+1)$ 处的分布密度，而方程 $y=\psi(x)$ 就給出了分布曲綫．因为 $N_n(\alpha,\beta)$ 显然等于滿足不等式

$$\alpha\leqslant\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n}<\beta$$

的整数 m 的个数，我們就得到

$$N_n(\alpha,\beta)-\frac{n}{\pi}(\arccos\alpha-\arccos\beta)=0\quad 或\quad -1,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\alpha,\beta)}{n}=\frac{\arccos\alpha-\arccos\beta}{\pi},$$

于是立即推得：

$$\psi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\pi}\ \frac{\arccos x-\arccos(x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

所得到的分布曲綫如圖 6．

現在我們来考察多項式 $T_n(x)$ 在基本区間上極大值与極小值如何分布．它們的位置由方程 $T'_n(x)=0$ 即

$$\frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

来确定，由此得到

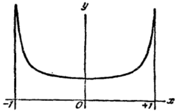


圖　6

$$x=\cos\frac{m\pi}{n}\quad(m=1,2,\cdots,n-1);$$

在圖 5 中虛綫的垂足对应于这些 x 值．很清楚，

$$T_n\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)=\cos m\pi=(-1)^m,$$

因此就得到很重要的結果：多項式 $T_n(x)$ 的零点是这样分布的：$T_n(x)$ 的極大值与極小值严格地均衡，亦即，所有的極大值等于 $+1$，所有的極小值等于 -1．还需补充說明契比謝夫多項式在区間 $(-1,+1)$ 的两端也取这些值：

$$T_n(+1)=1,\quad T_n(-1)=(-1)^n. \tag{44}$$

因此，契比谢夫多项式的曲綫圖形在基本区間上振动于$+1$和-1之間；在这区間的界限之外，显然它就越出了这范圍，而单調增加或单調减小。如圖 7 所示。

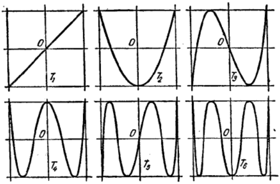


圖 7

很值得注意的是：

$$T'_n(1)=\lim_{x\to 1}T'_n(x)=\lim_{x\to 1}\frac{n\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}=n^2. \tag{44'}$$

練習 作多项式 $T_{12}(x)$ 的圖形.

为要知道契比謝夫多項式在复数域中的状况，我們把自变数記作 $z=x+iy$，并按照公式

$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\qquad y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \tag{45}$$

引进椭圓坐标.

显然，当 $\rho(>1)$ 为常数时，在 OXY 平面上就得到椭圓 (E_ρ)：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

它的軸与坐标軸重合，而半軸长则为

$$a=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right),\qquad b=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right). \tag{46}$$

因为 $a^2-b^2=1$，故所有这些椭圓是共焦点的，而且焦点是基本区間$(-1,+1)$的两端点.

从公式(46)就得到

$$\rho=a+b,$$

即 ρ 恰好是以 $-1, +1$ 为焦点、并通过所考虑点的椭圆的两半軸和。

同样，当 φ 为常数时，我們就得到双曲綫族

$$\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^2-\left(\frac{y}{\sin\varphi}\right)^2=1,$$

它与第一个椭圆族有同样的焦点，并与該椭圆族正交。

将 z 在椭圆坐标中所取的值

$$z=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi}+\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right) \tag{47}$$

代入 $T_n(z)$ 中，就会有：

$$\sqrt{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi}-\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right),$$

$$z+\sqrt{z^2-1}=\rho e^{i\varphi}, \qquad z-\sqrt{z^2-1}=\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}, \tag{47'}$$

所以

$$T_n(z)=\frac{1}{2}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n\right]=\frac{1}{2}\left(\rho^n e^{in\varphi}+\frac{1}{\rho^n}e^{-in\varphi}\right), \tag{48}$$

且有

$$\Re T_n(z)=\frac{1}{2}\left(\rho^n+\frac{1}{\rho^n}\right)\cos n\varphi,$$

$$\Im T_n(z)=\frac{1}{2}\left(\rho^n-\frac{1}{\rho^n}\right)\sin n\varphi,$$

$$|T_n(z)|=\frac{1}{2}\sqrt{\rho^{2n}+2\cos 2n\varphi+\frac{1}{\rho^{2n}}}. \tag{49}$$

假定考虑某一不屬于基本区間 $(-1, +1)$ 的固定值 z；則 ρ 与 φ 是常数，且 $\rho>1$。可以断定，尽管分布在基本区間中的 $T_n(z)$ 的零点随着 n 增加而無限密集，然而对于固定值 z，不論它与基本区間多么接近，多項式 $T_n(z)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的模像某一几何級数的各項一样無限地增加，这就是說：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T_n(z)|}=\rho. \tag{50}$$

这可从公式(49)直接看出来．由此也順便推得，在以区間 $(-1, +1)$ 的两端为焦点的椭圓上，$T_n(z)$ 的增加是同一級的。

其次，契比謝夫多項式具有正交性，即

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_k(x)\,T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0 \qquad (k, l=0, 1, 2, \cdots;\quad k\neq l). \tag{51}$$

实际上，令 $x=\cos\theta$ 就給出了：

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_k(x)\,T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi}\cos k\theta\cos l\theta\,d\theta=0.$$

若 $k=l$ 则得：

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi,$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi}\cos^2 k\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\qquad(k=1,2,\cdots).\qquad(52)$$

令

$$\widehat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x),\qquad \widehat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\qquad(n=1,2,\cdots),$$

就可把最后的关系式写成下列形状：

$$\int_{-1}^{+1}\widehat{T}_k^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=1\qquad(k=0,1,2,\cdots).\qquad(53)$$

最后，应当提到契比謝夫多項式的著名的下列極值性質，把它們并列起来很有趣。

I. 在 x^n 的系数为 1 的一切 $n(\geqslant 1)$ 次多項式 $P(x)$ 中，多項式

$$\dot{T}_n(x)\equiv\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

能使表达式

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant +1}|P(x)|\qquad(54)$$

成为極小，或者，如通常所說的，它在区間$(-1,+1)$上与零偏差最小。事实上，对于多項式 $\dot{T}_n(x)$，表达式 (54) 等于$\frac{1}{2^{n-1}}$，即等式

$$\dot{T}_n\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)=\frac{(-1)^m}{2^{n-1}}\qquad(m=0,1,2,\cdots,n)$$

成立。

若在上述类中，有一个多項式 $P(x)$ 不恒等于 $\dot{T}(x)$ 而滿足条件

$$|P(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}\qquad(-1\leqslant x\leqslant +1),$$

则差数 $R(x)\equiv\dot{T}_n(x)-P(x)$ 就会是 $n-1$ 次多項式，且滿足条件

$$(-1)^m R\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)>0\qquad(m=0,1,2,\cdots,n).$$

从最后这不等式可見，多項式 $R(x)$ 在区間 $(-1,+1)$ 中至少有 n 次为零，而这是不可能的，因为 $R(x)$ 的次数等于 $n-1$。

II. 在 x^n 的系数为 1 的一切 $n(\geqslant 1)$ 次多項式 $P(x)$ 中，多項式 $\dot{T}_n(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ 使积分

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{55}$$

成为極小。

設将多項式 $P(x)$ 按多項式 $\widehat{T}_m(x)$ 展开：

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m \widehat{T}_m(x).$$

因为

$$\widehat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-1} \cdot \dot{T}_n(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

所以在以上恒等式中比較 x^n 的系数，就得到

$$c_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

另一方面，注意正交性条件(51)以及公式(53)，則可斷定积分(55)等于和数

$$\sum_{m=0}^{n} c_m^2.$$

显然，当設

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

时，也就是当

$$P(x) = c_n \widehat{T}_n(x) = \dot{T}_n(x)$$

时，积分(55)达到極小值。

这極小值等于

$$c_n^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

5. 綫性代数方程組的解法 因为以后要經常遇見綫性方程組，回忆一下与此相关的基本定理以及由此推得一系列推論，不無好处。

設 A 表一 n 級行列式，其一般元为 a_{rs}：

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{rs}|, \tag{56}$$

而 A_{rs} 是元 a_{rs} 的代数余子式，亦即在行列式中去掉第 r 行和第 s 列后的子行列式再乘上 $(-1)^{r+s}$。

按照拉普拉斯定理，我們有：

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rs} A_{rt} = \begin{cases} 0, & \text{当 } s \neq t, \\ A, & \text{当 } s = t, \end{cases} \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{rs} A_{ts} = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \neq t, \\ A, & \text{当 } r = t. \end{cases} \tag{57}$$

由此得到基本定理（克拉麦法則）：如果含 n 个未知数的 n 个綫性方程組

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n, \end{array}\right\} \tag{58}$$

或者更簡单地

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s = b_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{59}$$

的行列式 A 不等于零：

$$A \neq 0, \tag{60}$$

則这方程組有一組解且仅有一組解；这組解以公式

$$x_s = \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} b_r A_{rs}}{A} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{61}$$

給出，即每一未知数的值等于一个分数，这分数的分母是方程組的行列式，而分子是分母在行列式中将对应于所求未知数的系数那一列換成方程組中常数項所組成的一列。

事实上，在方程組(59)上乘以 A_{rt}，然后对 r 相加，在右端我們得到

$$\sum_{r=1}^{n} b_r A_{rt};$$

而在左端，首先对 r 相加，然后再对 s 相加，并注意关系式 (57)，就得到 Ax_t，因此最后有

$$Ax_t = \sum_{r=1}^{n} b_r A_{rt} \qquad (t = 1, 2, \cdots, n),$$

这就与(61)等价。因此方程組(51)除了公式(61)所給出的解外再不能有其他的解了。

反过来，将(61)乘上 a_{ts} 并对 s 相加，就有：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ts} x_s = \frac{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_r a_{ts} A_{rs}}{A},$$

由(57)，此即

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ts} x_s = b_t \qquad (t=1,2,\cdots,n),$$

于是得知公式(61)确乎給出了方程組(59)的解。

我們来討論含 n 个未知数的 n 个齐次方程組这一特殊情况($b_r=0; r=1,2,\cdots,n$)：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{array}\right\} \tag{62}$$

这样的方程組有显明的解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，为簡便起見，称它为零解．运用基本定理到方程組(62)上，就能断定：如 n 个未知数的 n 个齐次綫性方程組的行列式不等于零，則这方程組除了零解外不能有其他的解．

反过来，如 n 个未知数的 n 个齐次綫性方程組有异于零解的解，則方程組的行列式必等于零．

现在我們討論含 n 个未知数的 $n+1$ 个綫性方程組

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \\ a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,n}x_n=b_{n+1}. \end{array}\right\} \tag{63}$$

因为方程的个数超过未知数的个数，則仅当系数之間有着特殊关系时，这方程組才能够是相容的，也就是有解的．我們来导出这个关系式．設(63)的解由公式

$$x_k=x_k^0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

給出，那么所有的方程(63)当用 x_k^0 代换 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 时皆被滿足．

現在考察含 $n+1$ 个未知数的 $n+1$ 个齐次綫性方程組：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_1x_{n+1}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_2x_{n+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_nx_{n+1}=0, \\ a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,n}x_n+b_{n+1}x_{n+1}=0. \end{array}\right\} \tag{64}$$

根据前面的假設，这方程組有解

$$x_1=x_1^0;\ x_2=x_2^0;\ \cdots;\ x_n=x_n^0;\ x_{n+1}=-1,$$

显然它不是零解。但在这种情况下，方程組(64)的行列式等于零：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}=0. \qquad (65)$$

我們約定称此行列式为“增广”行列式。于是就得到結論：若存在着数 $x_k(k=1, 2,\cdots,n)$ 滿足含 n 个未知数的 $n+1$ 个綫性方程組 (64)，則这方程組的“增广”行列式 (65) 一定等于零。

換个說法：要在含 n 个未知数的 $n+1$ 个綫性方程組 (64) 中消去未知数 x_k，可以令方程組的“增广”行列式(65)等于零而办到。

6. 斯提叶斯积分 以后常常有机会用到通常（黎曼）积分的一种推广，称作斯提叶斯[1] 积分。我們覚得在这里提出这种积分的定义和它的一些重要性質是有益的。

設 $f(x)$ 在区間 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上連續，又 $\psi(x)$ 在这个区間上不減。考虑和数

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})], \qquad (66)$$

其中 x_i 滿足不等式

$$a_0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b, \qquad (67)$$

而 ξ_i 是滿足不等式

$$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

的数。

設 Δ 表差数 $x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最大者。設想分点 x_i 的个数無限增加，而且使 Δ 趋于零。于是和数 S 的極限

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]=\int_a^b f(x)d\psi(x) \qquad (68)$$

称为斯提叶斯积分。需要証明，在上述条件下这極限存在。

用 M 与 m 表記函数 $f(x)$ 在区間 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上的最大值与最小值。M_i 与 m_i 表記这函数在区間 $(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$ 上的最大值与最小值，$i=1,2,\cdots,n$。称和数

1) T. J. Stieltjes, "Ann. de Toulouse" (1894—1895)(有俄譯本，参看第三章文献)。

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}M_i[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})] \qquad 与 \qquad \underline{S}=\sum_{i=1}^{n}m_i[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]$$

为对应于基本区間分成子区間的分法 (67) 的"上"和与"下"和，而 S 为"中"和．因为 $\psi(x)$ 是不减函数，故所有的差数 $\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})$ 非負，从而

$$\underline{S}\leqslant S\leqslant \overline{S}. \tag{69}$$

此外，由不等式 $m\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M\ (i=1,2,\cdots,n)$ 得知：

$$\overline{S}\leqslant MV, \qquad \underline{S}\leqslant mV, \tag{70}$$

其中

$$V=\psi(b)-\psi(a)$$

(函数 $\psi(x)$ 在基本区間上的"全变差")．

不难明白，当基本区間分得更細时，即将每一个子区間 $(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$ 再分成一些新区間，而原来的分点都保留，則"下"和不减，"上"和不增．

因此，如有一愈来愈細的分法序列，而以 $\overline{S}_k$ 与 $\underline{S}_k$ 表記所对应的分法的"上"和与"下"和 $(k=1,2,3,\cdots)$，則得不等式：

$$\underline{S}_1\leqslant\underline{S}_2\leqslant\cdots\leqslant\underline{S}_k\leqslant\cdots\leqslant\overline{S}_k\leqslant\cdots\leqslant\overline{S}_2\leqslant\overline{S}_1,$$

同时且有

$$mV\leqslant\underline{S}_k\leqslant\overline{S}_k\leqslant MV.$$

可以証明，和数 $\underline{S}_k$ 与 $\overline{S}_k$ 趋于同一極限：

$$\lim\overline{S}_k=\lim\underline{S}_k=I. \tag{71}$$

事实上，由于函数 $f(x)$ 的連續性，就能对于任意小的 $\varepsilon(>0)$，选取这样的 $\delta(>0)$，使当不等式

$$|x'-x''|\leqslant\delta \qquad (a\leqslant x',x''\leqslant b)$$

成立时，便有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{V}.$$

所以如果 $\Delta<\delta$，則

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{V}[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]=\varepsilon.$$

从(69)与(71)就得到，中和 S（当任意取 ξ_i 时）趋于同一極限 I：

$$\lim S=I. \tag{72}$$

还要証明，对于任意一分法序列所得到的極限 I 总是同一个．为此，我們来考察

对应于不同分法的两个中和：

$$S'=\sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i')[\psi(x_i')-\psi(x_{i-1}')] \quad 与 \quad S''=\sum_{j=1}^{n''} f(\xi_j'')[\psi(x_j'')-\psi(x_{j-1}'')],$$

而且設这两个分法是这样細，使得每一个分法的 Δ 不超过 δ。把所有的点 x_i' 与 x_i'' 做分点构成一分法，其对应的和数为 S；把和数 S' 与 S'' 来跟 S 相比較。显然，和数 S' 与 S 的差不大于 ε，和数 S'' 与 S 的差也是如此；所以

$$|S'-S''|\leqslant 2\varepsilon,$$

由此可見，对于不同分法序列，和数的極限是相同的，即为 I。

極限 I 就是斯提叶斯积分：

$$I=\int_a^b f(x)d\psi(x).$$

应該提出斯提叶斯积分的这样一些性質：

1) $$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^c f(x)d\psi(x)+\int_c^b f(x)d\psi(x) \qquad (a<c<b). \qquad (73)$$

这是由于：总可以把点 c 取作分点之一。

2) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]d\psi(x)=\int_a^b f(x)d\psi(x)+\int_a^b g(x)d\psi(x). \qquad (74)$$

实际上，只要在等式

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)][\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]+\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})]$$

中取極限即可。

"积分中值"定理可以表作公式：

3) $$mV\leqslant\int_a^b f(x)d\psi(x)\leqslant MV.$$

这关系式可由不等式(70)推得。

注意下列特殊情况。

設函数 $\psi(x)$ 有連續导数 $\psi'(x)\equiv p(x)\geqslant 0$，則斯提叶斯积分就化为通常积分：

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)p(x)dx.$$

例如，当 $\psi(x)\equiv x$ 时，我們就得到：

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)dx.$$

另一方面，注意以下所述：設正数

$$p=\lim_{x\to\xi+0}\psi(x)-\lim_{x\to\xi-0}\psi(x)$$

称为函数 $\psi(x)$ 在間断点 $x=\xi$ 处的跳躍. 如函数 $\psi(x)$ 是"阶梯"函数，即函数在点 c_k 处有跳躍

$$C_k=\psi(c_k+0)-\psi(c_k-0)\qquad (k=0,1,2,\cdots,p),$$

而在这些点之間的区間中，函数是常数，則斯提叶斯积分就成为和数：

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\sum_{k=1}^{p}C_kf(c_k).$$

在一般情况下，斯提叶斯积分不能化为通常积分，也不能化为和数. 但在以后的叙述中，所有具体例子都对应于这些特殊情况.

数值 x，在其邻域中函数 $\psi(x)$ 保持常数值者，称为逗留点；而其余的点称为增长点. 若函数 $f(x)$ 在区間 (a,b) 中是正的，則对于所有非常数的不減权 $\psi(x)$，有

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)>0.$$

附注 1. 斯提叶斯积分的概念可推广到函数 $\psi(x)$ 不必是不減的，而只要它有有界变差的情况.

和数

$$\sum_{i=1}^{n}|\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})|$$

的上确界称为函数 $\psi(x)$ 在区間 (a,b) 上的变差.

当說到函数 $\psi(x)$ 有有界变差，这就是說所述上确界有限. 函数 $\psi(x)$ 有有界变差这一性質与函数可以表作两个不減函数的差这一性質是等价的. 若函数 $\psi(x)$ 有有界变差，而 $f(x)$ 在所討論的区間上連續，則和数

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)|\psi(x_i)-\psi(x_{i-1})|$$

的極限存在，記作

$$\int_a^b f(x)|d\psi(x)|.$$

于是就有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)d\psi(x)\right|\leqslant\int_a^b|f(x)||d\psi(x)|.$$

附注 2. 为了避免混淆起見，在积分

$$\int_a^b f(x,y)d_x\psi(x,y)$$

中文字 d 下的指标表示积分变数，而另一变数算作参变数。

关于二重斯提叶斯积分，我們只簡单的提一提。設在 OXY 平面上已給一区域 (D)；又設对于屬于 (D) 的子区域 (σ)，对应有一非負函数 $\psi(\sigma)$，且它具有可加性：即若 (σ') 与 (σ'') 無公共点，則

$$\psi(\sigma'+\sigma'')=\psi(\sigma')+\psi(\sigma'').$$

展布在区域 (D) 上的斯提叶斯积分了解为下面和数的極限：

$$\iint_{(D)} f(x,y)d\psi(\sigma)=\lim_{\Delta\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\psi(\sigma_i), \tag{75}$$

其中 (σ_i) 是将区域 (D) 細分而得的子区域，(ξ_i,η_i) 是区域 (σ_i) 中一任意点的坐标，并假定各区域 (σ_i) 的直徑[1] 中的最大者 Δ 趋近于零。在函数 $f(x,y)$ 于区域 (D) 中連續的假設下，可以証明極限(75)存在。

特別，若

$$\psi(\sigma)=\iint_{(\sigma)} p(x,y)dxdy,$$

其中 $p(x,y)$ 是一連續非負函数，則斯提叶斯积分就化为通常的二重积分：

$$\iint_{(D)} f(x,y)d\psi(\sigma)=\iint_{(D)} f(x,y)p(x,y)dxdy.$$

但二重斯提叶斯积分也可能化为和数或者曲綫积分。

二重斯提叶斯积分在复数平面上也有用处：

$$\iint_{(D)} f(\zeta)d\psi(\sigma)=\lim_{\Delta\to0}\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)\psi(\sigma_\nu)$$
$$(\zeta=\xi+i\eta,\qquad \zeta_\nu=\xi_\nu+i\eta_\nu)$$[2]。

1) 区域中两点間距离的上确界称为它的直徑。

2) 关于斯提叶斯积分的更多知識，讀者可以在下列書籍中找到：В. И. Гливенко, Интеграл Стилтьеса (ОНТИ, 1936) 或者 И. П. Натансон 著，徐瑞云譯：实变函数論，上、下册(高等教育出版社版)。

第一章

点插补法

7. 房德莽行列式[1] 我們来討論并計算由数 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 所組成的所謂 $n+1$ 級房德莽行列式：

$$W(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

首先注意其下列性質：1）当两数 x_i 和 $x_k(i\neq k)$ 互換时，有两列的位置互換了，因此行列式变号；2）若数 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 之中有相等的，則行列式等于零。

設数 $x_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 是常数，而 x_n 是变数；去掉指标 n。将房德莽行列式 $W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x)$ 依第 $n+1$ 列的元展开，我們就看見它是 x 的 n 次多項式；另一方面，当 $x=x_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 时，它等于零，因此可以写出恒等式

$$W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}), \qquad (2)$$

其中因子 A 与变数 x 無关。它等于所考察的多項式中 x^n 的系数，如将行列式按最后一行的元展开，可知这系数不是别的，恰好就是由数 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 所組成的 n 級房德莽行列式：

$$A=W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}).$$

将 A 值代入(2)同时将 x 換回为 x_n，我們就得到等式

$$W(x_0,x_1,\cdots,x_n)=W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}). \qquad (3)$$

現在可用这种方式把行列式 $W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的計算化为 $W(x_0,x_1,\cdots,x_{n-2})$ 的計算，如此类推，就得到一串遞推等式，而最后两个就是

$$\left.\begin{aligned}&W(x_0,x_1,x_2)=W(x_0,x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\ &W(x_0,x_1)=(x_1-x_0).\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

把所得到的等式相乘，就得：

1) Vandermonde, Résolution des équations(1770).

$$W(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \times$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \times$$
$$\times (x_1 - x_0) = \prod_{p<q}^{0\cdots n}(x_q - x_p), \qquad (5)$$

这就是說，房德蒙行列式等于組成行列式的諸数一切可能的差数的乘积（而且必须是从后面的数减去前面的数）。

由此推得，若組成行列式的諸数彼此不相等，那么房德蒙行列式不等于零。

例 1. 驗証

$$W(1, 2, 3, \cdots, n) = 1!\,2!\,3!\cdots(n-1)!\,.$$

例 2. 計算

$$\Omega_n = W(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}),$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 1 的 n 次根.

我們得到:

$$\Omega_n = \prod_{p<q}^{0\cdots n-1}(\omega^q - \omega^p) = \prod_{p<q}^{0\cdots n-1} 2i\omega^{\frac{p+q}{2}}\sin\frac{\pi}{n}(q-p) =$$
$$= i^{\frac{1}{2}(n-1)(3n-2)}\cdot 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Big(\prod_{1\leq m\leq\frac{n}{2}}\sin\frac{m\pi}{n}\Big)^n = i^{\frac{1}{2}(n-1)(3n-2)}\sqrt{n^n}\,.$$ [1]

特别，

$$\Omega_2 = -2, \qquad \Omega_3 = -3i\sqrt{3}, \qquad \Omega_4 = -16i.$$

例 3. 計算行列式

$$W(e^{ix_1}, e^{ix_2}, \cdots, e^{ix_n}).$$

这行列式等于

$$(2i)^{\frac{1}{2}n(n-1)} e^{\frac{i}{2}(n-1)\sum_{m=1}^{n}x_m}\prod_{p<q}^{1\cdots n}\sin\frac{x_q - x_p}{2}.$$

我們来計算与房德蒙行列式相像的行列式:

$$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos x_0 & \cos x_1 & \cdots & \cos x_n \\ \cos 2x_0 & \cos 2x_1 & \cdots & \cos 2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos nx_0 & \cos nx_1 & \cdots & \cos nx_n \end{vmatrix}$$

与

1) 这个正弦乘积例如已在 Г. М. Фихтенгольц 著，徐献瑜等譯，微积分学教程第二卷第三分册（高等教育出版社版）中計算出来了。

$$W_s(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 \cdots \sin x_n \\ \sin 2x_1 & \sin 2x_2 \cdots \sin 2x_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \sin nx_1 & \sin nx_2 \cdots \sin nx_n \end{vmatrix}. \tag{6}$$

設想在第一个行列式中，将 x_n 換作变数 x；显然，$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$ 是 n 次偶三角多項式。立刻可以看出它的零点就是数 $\pm x_0$, $\pm x_1$, $\cdots$, $\pm x_{n-1}$。所以按照第三节公式(33)可以写出

$$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = B \prod_{m=0}^{n-1} (\cos x - \cos x_m),$$

其中 B 等于 2^{n-1} 与 $\cos nx$ 的系数的乘积；这个系数很明显等于 $W_c(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$。因此（再将 x 換回为 x_n）就有：

$$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 2^{n-1} W_c(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \cdot \prod_{m=0}^{n-1} (\cos x_n - \cos x_m).$$

把一系列这样的遞推公式相乘，最終便得：

$$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{p<q}^{0\cdots n} (\cos x_q - \cos x_p). \tag{7}$$

同样，用第三节同一公式(33)也可以計算行列式 $W_s(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。在将 x_n 換作 x 后，我們就得到 n 次奇三角多項式，其零点是数 $0, \pi, \pm x_1, \pm x_2, \cdots, \pm x_{n-1}$。

由此很容易斷定，$\dfrac{W_s(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)}{\sin x}$ 是 $n-1$ 次偶三角多項式，并具有零点 $\pm x_1, \pm x_2, \cdots, \pm x_{n-1}$，从而

$$\frac{W_s(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)}{\sin x} = B \prod_{m=1}^{n-1} (\cos x - \cos x_m),$$

其中 B 等于 2^{n-2} 与 $\cos(n-1)x$ 的系数的乘积；这系数等于 $2W_s(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$[1)]。

所以（再引进 x_n）就得到：

$$W_s(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2^{n-1} W_s(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \sin x_n \prod_{m=1}^{n-1} (\cos x_n - \cos x_m).$$

把这种相仿的等式相乘，結果我們就有：

$$W_s(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \sin x_1 \sin x_2 \cdots \sin x_n \prod_{p<q}^{1\cdots n} (\cos x_q - \cos x_p). \tag{8}$$

最后还要研究行列式

1) 应該注意 $\dfrac{\sin nx}{\sin x} = 2\cos(n-1)x + \cdots \quad (n \geqslant 2)$.

$$W_{cs}(x_0,x_1,\cdots,x_{2n})=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots 1\\ \cos x_0 & \cos x_1 & \cdots \cos x_{2n}\\ \sin x_0 & \sin x_1 & \cdots \sin x_{2n}\\ \cos 2x_0 & \cos 2x_1 & \cdots \cos 2x_{2n}\\ \sin 2x_0 & \sin 2x_1 & \cdots \sin 2x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cos nx_0 & \cos nx_1 & \cdots \cos nx_{2n}\\ \sin nx_0 & \sin nx_1 & \cdots \sin nx_{2n}\end{vmatrix}. \qquad (9)$$

这里应用遞推过程就不方便了，我們采取另一方法．把行列式中的行与列对調，并为簡便起見，只写出一行，且去掉 x 的指标；这样，我們就写出：

$$W_{cs}=|1\ \cos x\ \sin x\ \cos 2x\ \sin 2x\ \cdots\ \cos nx\ \sin nx|.$$

将第 $3,5,\cdots,2n+1$ 列乘上 i 并分别加到第 $2,4,\cdots,2n$ 列上，則有：

$$W_{cs}=|1\ e^{ix}\ \sin x\ e^{2ix}\ \sin 2x\ \cdots\ e^{inx}\ \sin nx|.$$

将第 $3,5,\cdots,2n+1$ 列乘上 $-2i$，又有：

$$(-2i)^n W_{cs}=|1\ e^{ix}\ -2i\sin x\ e^{2ix}\ -2i\sin 2x\ \cdots\ e^{inx}\ -2i\sin nx|,$$

并且将第 $2,4,\cdots,2n$ 各列分别加到第 $3,5,\cdots,2n+1$ 各列上去得：

$$(-2i)^n W_{cs}=|1\ e^{ix}\ e^{-ix}\ e^{2ix}\ e^{-2ix}\ \cdots\ e^{inx}\ e^{-inx}|.$$

现在互换各列，使得上式中各元成为具有公比 e^{ix} 的几何級数[这就产生 $n(n+1)$ 个变号]：

$$(-1)^{n(n+1)}\cdot(-2i)^n W_{cs}=|e^{-nix}\ e^{-(n-1)ix}\ \cdots\ e^{-ix}\ 1\ e^{ix}\ \cdots\ e^{(n-1)ix}\ e^{nix}|.$$

将行列式的第一行乘上 e^{nix_0}，第二行乘上 e^{nix_1} 等等：

$$e^{ni\sum_{m=0}^{2n}x_m}\cdot(-1)^{n(n+1)}\cdot(-2i)^n W_{cs}=|1\ e^{ix}\ e^{2ix}\ \cdots\ e^{2nix}|.$$

这等式的右端的行列式是通常的 $2n+1$ 級房德蒙行列式(参看例 3)：

$$W(e^{ix_0},e^{ix_1},\cdots,e^{ix_{2n}})=(2i)^{n(2n+1)}\cdot e^{in\sum_{m=0}^{2n}x_m}\prod_{p<q}^{0\cdots 2n}\sin\frac{x_q-x_p}{2}.$$

由此，化简后便得：

$$W_{cs}(x_0,x_1,\cdots,x_{2n})=2^{2n^2}\prod_{p<q}^{0\cdots 2n}\sin\frac{x_q-x_p}{2}. \qquad (10)$$

8. 拉格朗習插补多項式 現在轉到我們要研究的最重要的一个問題．即要求作出一个 n 次多項式 $P(x)$，使它在 $n+1$ 个已知点

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$$

处分别取給定的值

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n.$$

对于这問題可以作出几何的表述：即要求作出一个 n 次多項式 $P(x)$，使它的圖形通过已知的 $n+1$ 个点 $M_k(x_k, y_k)(k=0,1,2,\cdots,n)$。

应該定出多項式 $P(x)$：

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n \tag{11}$$

的各系数 c_m。

这些系数必須这样选定，使得下列关系式成立：

$$P(x_m)=y_m \qquad (m=0,1,\cdots,n), \tag{12}$$

或者写开来，就是

$$\left.\begin{array}{l} c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+\cdots+c_nx_0^n=y_0, \\ c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+\cdots+c_nx_1^n=y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+c_1x_n+c_2x_n^2+\cdots+c_nx_n^n=y_n. \end{array}\right\} \tag{13}$$

我們看到，現在得到了含 $n+1$ 个未知数 $c_m(m=0,1,\cdots,n)$ 的 $n+1$ 个方程的綫性方程組。它的行列式显然就是

$$W(x_0, x_1, \cdots, x_n),$$

但根据問題的意义，数 x_k 彼此不相等，故这行列式就异于零。所以方程組 (13) 有一且仅有一解，从而上面提出的問題也是如此。为了要找出这解，应从方程組(13)确定系数 c_m，然后将 c_m 代入(11)，而这与从 (11) 和 (13) 中消去系数 c_m 是一样的。如果令"增广"行列式等于零(为了方便交换了列)：

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2\cdots x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2\cdots x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2\cdots x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2\cdots x_n^n \end{vmatrix}=0,$$

那么这个消去法就立刻完成了。

按第一列的元展开行列式，同时注意到代数余子式也是房德蒙行列式，我們就得到：

$$P(x)\,W(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m y_m W(x, x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_{m+1}, \cdots, x_n).$$

变换在求和記号后面的各行列式的列，便有

$$P(x)\,W(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\sum_{m=0}^{n} y_m W(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}, x, x_{m+1}, \cdots, x_n),$$

于是

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}y_m\frac{W(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x,x_{m+1},\cdots,x_n)}{W(x_0,x_1,\cdots,x_n)}.$$

注意到房德莽行列式的值(5)时，就能断定，化简上一公式之后便可得到

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}y_m\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)}. \tag{14}$$

因此，多项式 $P(x)$ 作出来了：它称为拉格朗智[1] 插补多项式.

例 1. 当 $n=1$ 时，拉格朗智公式解决了解析几何上的一个問題：通过两点作一直綫.

例 2. 当 $n=2$ 时，这公式解决了下一問題：即作一具有鉛垂軸并通过已知三点的拋物綫．这时若将点的横坐标表为 a,b,c，而縱坐标表为 A,B,C，那么拉格朗智公式的形状是：

$$P(x)=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

例 3. 作一二次三項式，在点 0, 4 和 6 处分别取值 1, 3 和 2.

我們得到：

$$P(x)=1\frac{(x-4)(x-6)}{(0-4)(0-6)}+3\frac{(x-6)(x-0)}{(4-6)(4-0)}+2\frac{(x-0)(x-4)}{(6-0)(6-4)}=1+\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}x^2.$$

例 4. 作一三次多項式 $P(x)$，使在点 1, 2, 3 和 4 处分别取值 0, −5, −6 和 3.

答. $$P(x)=3-4x^2+x^3.$$

拉格朗智插补公式可以用多少有点人为的方法引出，而不利用房德莽行列式，即是：不去解决上述求多項式 $P(x)$ 的基本問題，而設法解决 $n+1$ 个下面一类具有簡化了的数据的問題，亦即：求一 n 次多項式 $P_m(x)$，使它在所有給出的点 x_k 处(除 x_m 外)皆取值零，而在 x_m 处取值 1 $(0\leqslant m\leqslant n)$．这就是說，多項式 $P_m(x)$ 必須滿足以下的条件

$$P_i(x_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } k\neq i \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } k=i \text{ 时}\end{cases}\qquad (i,k=0,1,\cdots,n). \tag{15}$$

若多項式 $P_m(x)$ 已作好，那么要作出解决一般問題的多項式 $P(x)$ 已經不是困难的事情了；从关系式(15)推得：由公式

$$P(x)=y_0P_0(x)+y_1P_1(x)+\cdots+y_nP_n(x) \tag{16}$$

确定的多項式 $P(x)$ 就滿足关系式 (12)．但多項式 $P_m(x)$ 很容易得来：既然它的零点必須是 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x_{m+1},\cdots,x_n$，那么，它就必須是：

$$P_m(x)=A(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n);$$

1) J. L. Lagrange, Leçons élémentaires sur les mathématiques (1795) (Oeuvres 7, 第 286 頁).

再选取因子 A，使多項式 $P_m(x)$ 在点 x_m 处取值 1，最后我們就能得到：

$$P_m(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)}.$$

把 $P_m(x)$ 的表达式代入(16)，又导出了拉格朗習公式．上述的討論便确立了多項式 $P(x)$ 存在；它的唯一性是早就知道了的，因为若两个 n 次多項式在 $n+1$ 个点处取相同的值，就不可能不彼此恒等．

拉格朗習公式(12)可以写得更簡短些．引进 $n+1$ 次多項式

$$A(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

很容易明白，

$$A'(x_m)=(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n).$$

由此便得

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}y_m\frac{A(x)}{(x-x_m)A'(x_m)}. \tag{17}$$

例 5. 作 $n-1$ 次多項式 $P(x)$，使它在契比謝夫多項式 $T_n(x)$ 的零点

$$x_m=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n}\qquad(m=1,2,\cdots,n)$$

处取已知值 y_m.

令

$$A(x)=\dot{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x,$$

就得到

$$A'(x)=\frac{n}{2^{n-1}}\frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\quad\text{与}\quad A'(x_m)=\frac{n}{2^{n-1}}\frac{(-1)^{m-1}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{2n}}.$$

这样，

$$P(x)=\frac{1}{n}\cos n\arccos x\cdot\sum_{m=1}^{n}y_m\frac{(-1)^{m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n}}.$$

9. 三角插补法 要求作一 n 次三角多項式 $T(x)$，使它在已給的 $2n+1$ 个点

$$x_0, x_1, \cdots, x_{2n}\qquad(\text{当 } i\neq k \text{ 时 } x_i-x_k\neq 2\lambda\pi)$$

处分别取值

$$y_0, y_1, \cdots, y_{2n}.$$

它的圖形的解釋与通常拉格朗習插补法的情况是一样的．

我們必需这样选取多項式

$$T(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (18)$$

的系数，使得它們滿足等式

$$T(x_m)=y_m \qquad (m=0,1,\cdots,2n).$$

所得到的含 $2n+1$ 个未知数的一組 $2n+1$ 个方程

$$a_0+(a_1\cos x_m+b_1\sin x_m)+\cdots+(a_n\cos nx_m+b_n\sin nx_m)=y_m$$
$$(m=0,1,\cdots,2n) \qquad (19)$$

的行列式正是

$$W_{cs}(x_0,x_1,\cdots,x_{2n})=2^{2n^2}\prod_{p<q}^{0\cdots 2n}\sin\frac{x_q-x_p}{2}, \qquad (20)$$

無疑問它是异于零的．因此这一問題有唯一的解答．从(18)和(19)中消去系数就得到

$$\begin{vmatrix} T(x) & 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx \\ y_0 & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2n} & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix}=0,$$

或者按第一列展开之后就得出

$$T(x)\,W_{cs}(x_0,\cdots,x_{2n})=\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m y_m W_{cs}(x,x_0,\cdots,x_{m-1},x_{m+1},\cdots,x_{2n}),$$

由此得到

$$T(x)=\sum_{m=0}^{2n}y_m\cdot\frac{W_{cs}(x_0,\cdots,x_{m-1},x,x_{m+1},\cdots,x_{2n})}{W_{cs}(x_0,\cdots,x_{2n})},$$

或者，注意到(10)便有：

$$T(x)=\sum_{m=0}^{2n}y_m\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x-x_{m+1}}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_m-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x_m-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x_m-x_{m+1}}{2}\cdots\sin\frac{x_m-x_{2n}}{2}}. \qquad (21)$$

这就是三角插补多項式的一般公式．

例 1. 作一次三角多項式 $T(x)$，使它在点 $0,\frac{5}{6}\pi$ 和 $\frac{4}{3}\pi$ 处分别取值 $1,\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$．我們得到：

$$T(x)=1\frac{\sin\frac{x-\frac{5}{6}\pi}{2}\sin\frac{x-\frac{4}{3}\pi}{2}}{\sin\frac{0-\frac{5}{6}\pi}{2}\sin\frac{0-\frac{4}{3}\pi}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x-\frac{4}{3}\pi}{2}\sin\frac{x-0}{2}}{\sin\frac{\frac{5}{6}\pi-\frac{4}{3}\pi}{2}\sin\frac{\frac{5}{6}\pi-0}{2}}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin\frac{x-0}{2}\sin\frac{x-\frac{5}{6}\pi}{2}}{\sin\frac{\frac{4}{3}\pi-0}{2}\sin\frac{\frac{4}{3}\pi-\frac{5}{6}\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

現在提出这样一个問題：求作 n 次偶三角多項式

$$T(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx,$$

使它在 $n+1$ 个点

$$x_0, x_1, \cdots, x_n \qquad (\text{当 } i\neq k \text{ 时 } x_i\pm x_k\neq 2\lambda\pi)$$

处分别取值

$$y_0, y_1, \cdots, y_n.$$

因为在这情况下所产生的方程組的行列式

$$W_c(x_0, x_1, \cdots, x_n)=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{p<q}^{0\cdots n}(\cos x_q-\cos x_p)$$

异于零，所以解的存在已有保証，而其解（用类似于上面所采用的計算就能証明）是由下一公式所給出的：

$$T(x)=\sum_{m=0}^{n}y_m\frac{(\cos x-\cos x_0)\cdots(\cos x-\cos x_{m-1})(\cos x-\cos x_{m+1})\cdots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_m-\cos x_0)\cdots(\cos x_m-\cos x_{m-1})(\cos x_m-\cos x_{m+1})\cdots(\cos x_m-\cos x_n)}. \qquad (22)$$

同样，在 n 个点

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \qquad (\text{当 } i\neq k \text{ 时 } x_i\pm x_k\neq 2\lambda\pi;\ x_i\neq\lambda\pi)$$

处取值

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

的 n 次奇三角多項式

$$T(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx$$

存在，且有下列形式：

$$T(x)=\sum_{m=1}^{n}y_m\frac{\sin x}{\sin x_m}\cdot\frac{(\cos x-\cos x_1)\cdots(\cos x-\cos x_{m-1})(\cos x-\cos x_{m+1})\cdots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_m-\cos x_1)\cdots(\cos x_m-\cos x_{m-1})(\cos x_m-\cos x_{m+1})\cdots(\cos x_m-\cos x_n)}. \qquad (23)$$

这是由于行列式

$$W_s(x_1, x_2, \cdots, x_n)=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n\cdot\prod_{p<q}^{1\cdots n}(\cos x_q-\cos x_p)$$

不为零。

高斯[1]就已經得到了公式(21)，(22)和(23)。

1) C. F. Gauss, Theoria interpolationis methodo nova tractata (1805) (Werke, 卷 3, 第265—330頁).

例 2. 求二次偶多项式 $T(x)$，使它在点 $0,\ \frac{\pi}{4}$ 和 π 处取值 $1, 2$ 和 -2.

这多项式为：

$$T(x)=1\frac{\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)(\cos x-\cos\pi)}{\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)(\cos 0-\cos\pi)}+2\frac{(\cos x-\cos\pi)(\cos x-\cos 0)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)}+$$

$$+(-2)\frac{(\cos x-\cos 0)\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{(\cos\pi-\cos 0)\left(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\left(2-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)+\frac{2}{3}\cos x+$$

$$+\left(-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)\cos 2x.$$

例 3. 求二次奇多项式 $T(x)$，使它在点 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3}{4}\pi$ 处取值 2 和 -3.

我們得到：

$$T(x)=2\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\cos x-\cos\frac{3}{4}\pi}{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3}{4}\pi}+(-3)\frac{\sin x}{\sin\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{5}{2}\sin 2x.$$

正如在一般多項式的情况时一样，只要預先作出下列各多項式，即可分别导出公式(21)—(23)：

1) 作出 n 次多項式 $T_m(x)$，使它滿足条件

$$T_i(x_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } i=k \text{ 时}\end{cases}\qquad (i, k=0, 1, \cdots, 2n),$$

2) 作出由以下条件所确定的 n 次偶多項式 $T_m(x)$

$$T_i(x_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } i=k \text{ 时}\end{cases}\qquad (i, k=0, 1, \cdots, n),$$

3) 作出由以下条件所确定的 n 次奇多項式 $T_m(x)$

$$T_i(x_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } i=k \text{ 时}\end{cases}\qquad (i, k=1, 2, \cdots, n).$$

只是必須注意，奇多項式当 $x=0, x=\pi$ 时一定为零.

公式(21)—(23)可以写成更简括的形式。令

$$B(x)=\sin\frac{x-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}{}^{1)},$$

1) 应該注意到 $B(x)$ 不是以 2π 为周期的三角多項式.

即可得到

$$B'(x_m)=\frac{1}{2}\sin\frac{x_m-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x_m-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x_m-x_{m+1}}{2}\cdots\sin\frac{x_m-x_{2n}}{2},$$

这样就可将(21)改写为：

$$T(x)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2n}y_m\frac{B(x)}{B'(x_m)\sin\frac{x-x_m}{2}}. \tag{24}$$

同样，(22)与(23)可以改写如下：

$$T(x)=-\sum_{m=0}^{n}y_m\cdot\frac{C(x)\sin x_m}{C'(x_m)(\cos x-\cos x_m)}\text{[1]} \tag{25}$$

与

$$T(x)=-\sin x\sum_{m=1}^{n}y_m\frac{D(x)}{D'(x_m)(\cos x-\cos x_m)}, \tag{26}$$

其中

$$C(x)=(\cos x-\cos x_0)\cdots(\cos x-\cos x_n),$$

$$D(x)=(\cos x-\cos x_1)\cdots(\cos x-\cos x_n).$$

例 4. 滿足条件

$$T\left(\frac{2m\pi}{2n+1}\right)=y_m \qquad (m=0,1,\cdots,2n)$$

的 n 次多項式 $T(x)$ 有下列形状：

$$T(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}y_m(-1)^m\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{m\pi}{2n+1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}y_m\frac{\sin(2n+1)\left(\frac{x}{2}-\frac{m\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{m\pi}{2n+1}\right)}. \tag{27}$$

例 5. 滿足条件

$$T\left(\frac{m\pi}{n}\right)=y_m \qquad (m=0,1,\cdots,n)$$

的 n 次偶多項式 $T(x)$ 有下列形状：

$$T(x)=\frac{1}{n}\sin x\sin nx\left[-\frac{1}{2}y_0\frac{1}{\cos x-1}+\sum_{m=1}^{n-1}y_m(-1)^{m+1}\frac{1}{\cos x-\cos\frac{m\pi}{n}}+\right.$$

1) 如果 $x_m=0$ (或 π)，那么 y_m 的分数乘数应当换成 $\frac{C(x)}{C'(0)(\cos x-1)}$ $\left(\text{或}\ \frac{-C(x)}{C'(\pi)(\cos x+1)}\right)$.

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\cdot y_n\cdot\frac{1}{\cos x+1}\Big].\tag{28}$$

例6. 滿足条件

$$T\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)=y_m \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

的 n 次奇多項式 $T(x)$ 有下列形状：

$$T(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}y_m(-1)^{m-1}\frac{\sin\frac{m\pi}{n+1}\sin(n+1)x}{\cos x-\cos\frac{m\pi}{n+1}}.\tag{29}$$

10. 有限差与阶乘多项式 設 $f(x)$ 是任意一函数，而 h 是异于零的常数。表达式

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x 处的第一有限差(或者称为一級有限差)。同样表达式

$$\Delta_2 f(x)=\Delta\Delta f(x)=[f(x+2h)-f(x+h)]-[f(x+h)-f(x)]=$$
$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$

是第二有限差(或者二級有限差)，仿此类推。一般說来，任意級的有限差是用下述遞推公式来定义的：

$$\Delta_{n+1}f(x)=\Delta\Delta_n f(x).$$

在作逐級有限差时，不难看出，它們能用在点列 $x+mh\ (m=0,1,2,\cdots)$ 上的函数值很簡单地表出来，即：

$$\Delta_n f(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}C_n^m f(x+mh).\tag{30}$$

这可毫無困难地用完全归納法来証明。

反过来，在点列 $x+nh$ 上的函数值也可表为在开始点处逐級有限差的綫性組合：

$$f(x+nh)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\Delta_m f(x),\tag{31}$$

而我們約定把已知函数算作是0級有限差：

$$\Delta_0 f(x)=f(x).$$

公式(31)也可以用归納法来証明，但我們宁願从关系式(30)直接导出它，这就相当于对数量 $f(x+mh)$ 解出这些关系式。在(30)中改換指标：

$$\Delta_m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k f(x+kh),$$

然后乘以 C_n^m 并对 m 从 0 相加到 n，就有

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta_m f(x) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_n^m C_m^k f(x+kh) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}C_n^m C_m^k f(x+kh);$$

为了得到(31)，只要注意

$$C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k},$$

所以

$$\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}C_n^m C_m^k = C_n^k \sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}C_{n-k}^{m-k}\begin{cases}0, & \text{当 } k<n \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } k=n \text{ 时}.\end{cases}$$

例 1. 計算逐級有限差的时候，通常都安排如下：

x	f	Δf	$\Delta_2 f$	$\Delta_3 f$	$\Delta_4 f$
15	714	6	2	−8	27
16	720	8	−6	19	−53
17	728	2	13	−34	102
18	730	15	−21	68	−148
19	745	−6	47	−80	88
20	739	41	−33	8	
21	780	8	−25		
22	788	−17			
23	771				

$(h=1)$

在这个例子中，$f(x)$ 的值假定是由实驗所給出的：例如可以設想：表上 x 的地方是月数，而表中 f 是指气压．

例 2. 令 $f(x)=\log_{10}x$．那么有限差的表为：

x	f	Δf	$\Delta_2 f$	$\Delta_3 f$
1.0	00000	4139	−360	57
1.1	04139	3779	−303	46
1.2	07918	3476	−257	34
1.3	11394	3219	−223	30
1.4	14613	2996	−193	23
1.5	17609	2803	−170	19
1.6	20412	2633	−151	17
1.7	23045	2482	−134	14
1.8	25527	2348	−120	
1.9	27875	2228		
2.0	30103			

$(h=0.1)$

有限差理論，或者称为有限差計算，是微分学的原始形式。在历史上，微分学是發源于有限差理論的。有限差和同一級的导数之間的联系可用極限过程来体現：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_n f(x)}{h^n}=f^{(n)}(x)\,^{1)}. \tag{32}$$

为了証明起見，注意按照有限增量定理，

$$\Delta\Phi(x)=h\Phi'(\xi),$$

其中 $x<\xi<x+h$；重复运用这等式就得到：

$$\Delta_n f(x)=\Delta\Delta_{n-1}f(x)=h[\Delta_{n-1}f(x)]'|_{x=\xi_1}=$$

$$=h\Delta_{n-1}f'(x)|_{x=\xi_1}=h\Delta_{n-1}f'(\xi_1)\quad (x<\xi_1<x+h),$$

$$\Delta_{n-1}f'(\xi_1)=h\,\Delta_{n-2}f''(\xi_2)\quad (\xi_1<\xi_2<\xi_1+h),$$

…………………………………………

$$\Delta f^{(n-1)}(\xi_{n-1})=hf^{(n)}(\xi_n)\quad (\xi_{n-1}<\xi_n<\xi_{n-1}+h),$$

所以

$$\Delta_n f(x)=h^n f^{(n)}(\xi)\quad (x<\xi=\xi_n<x+nh). \tag{33}$$

再以 h^n 除等式(33)，并且使 h 趋于零就行了。

由运算子 Δ 的分配性質

$$\Delta[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)]=c_1\Delta f_1(x)+c_2\Delta f_2(x)+\cdots+c_n\Delta f_n(x)$$

与显而易見的等式

$$\Delta x^m=(x+h)^m-x^m=mhx^{m-1}+\cdots$$

推得：和微分法一样，在作有限差时，多項式的次数减少一。由此可見，n 次多項式 $P(x)=c_nx^n+\cdots$ 的 n 級有限差是常量，亦即：

$$\Delta_n P(x)=n!\,h^n c_n.$$

頂好要注意到，当計算多項式在（成一算术級数的）一列点处的数值时，利用这个式子極为方便。例如当計算三次多項式 $P(x)=x^3-3x^2+7x-5$ 在 $x=0,1,2$ 等处的值的表时，

x	P	ΔP	Δ_2P	Δ_3P
0	−5	5	0	6
1	0	5	6	6
2	5	11	12	6
3	16	23	18	6
4	39	41		
5	80			

我們可以只直接算出值 $P(0)$，$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，然后利用减法构成差 $\Delta P(0)$，$\Delta_2P(0)$ 和

1) 在这里假定导数 $f^{(n)}(x)$ 連續。

$\Delta_3 P(0)$，同时在表中 $\Delta_3 P$ 一列中都填以同一常数，然后单用加法，就能計算出 $P(4)$，$P(5)$ 等等。

在有限差的理論中，所謂阶乘多項式（或者簡称阶乘）起着很大的作用，这多项式的零点組成一个公差为 h 的算术級数：

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0(x-a,h)\equiv 1,\\&\Phi_n(x-a,h)=\frac{1}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)\\&\qquad(n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

正如同

$$\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]'=\frac{(x-a)^n}{n!}$$

一样，我們得到

$$\Delta\Phi_{n+1}(x-a,h)=\Phi_n(x-a,h).\tag{35}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{n+1}(x-a,h)&=\frac{1}{(n+1)!\,h^{n+1}}[(x+h-a)(x-a)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)-\\&\quad-(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-nh)]=\\&=\frac{1}{(n+1)!\,h^{n+1}}(x-a)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)[(x+h-a)-(x-a-nh)]=\\&=\frac{1}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)=\Phi_n(x-a,h).\end{aligned}$$

此外，注意等式

$$\Phi_n(0,h)=0\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{36}$$

上面所指出的阶乘多項式的性質，使得我們很容易地将任意多項式按阶乘多項式展开。任意 n 次多項式 $P(x)$ 可以表示为

$$P(x)=c_0\Phi_0(x-a,h)+c_1\Phi_1(x-a,h)+c_2\Phi_2(x-a,h)+\cdots+c_n\Phi_n(x-a,h)\tag{37}$$

的形状，这是由于：阶乘多項式 $\Phi_n(x-a,h)\,(n=0,1,2,\cdots)$ 的 x^n 的系数不等于零。为了确定系数 $c_m\,(0\leqslant m\leqslant n)$，由公式(35)，只要把运算子 Δ 在恒等式(37)上运用 n 次：

$$\begin{aligned}\Delta P(x)&=c_1\Phi_0(x-a,h)+c_2\Phi_1(x-a,h)+\cdots+c_n\Phi_{n-1}(x-a,h),\\\Delta_2 P(x)&=c_2\Phi_0(x-a,h)+\cdots+c_n\Phi_{n-2}(x-a,h),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\Delta_n P(x)&=c_n\Phi_0(x-a,h),\end{aligned}\tag{38}$$

然后在恒等式(37)与(38)中令 $x=a$；那末[借助(36)]就得到：

$$c_0=P(a),\ c_1=\Delta P(a),\ c_2=\Delta_2 P(a),\cdots,\ c_n=\Delta_n P(a).$$

把所求得的系数的值代入恒等式(37)中，即得任意 n 次多项式 $P(x)$ 按阶乘多项式的展开式如下：

$$P(x)=P(a)\Phi_0(x-a,h)+\Delta P(a)\Phi_1(x-a,h)+\Delta_2 P(a)\Phi_2(x-a,h)+\cdots+ \\ +\Delta_n P(a)\Phi_n(x-a,h), \tag{39}$$

或者更詳細些，

$$P(x)=P(a)+\Delta P(a)\frac{x-a}{1!\,h}+\Delta_2 P(a)\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}+\cdots+ \\ +\Delta_n P(a)\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)}{n!\,h^n}. \tag{40}$$

例 3. 把多项式 $P(x)=x^3+4x^2+7$ 展开成阶乘多项式 $\Phi_n(x+3;2)$.

从

$$P(-3)=16,\quad P(-1)=10,\quad P(1)=12\quad 和\quad P(3)=70$$

得到

$$\Delta P(-3)=-6,\quad \Delta_2 P(-3)=8,\quad \Delta_3 P(-3)=48.$$

因此，按照公式(39)，

$$P(x)=16\Phi_0(x+3,2)-6\Phi_1(x+3,2)+8\Phi_2(x+3,2)+48\Phi_3(x+3,2).$$

例 4. 把 x^2, x^3 和 x^4 按下列阶乘多项式展开：

$$\Phi_n(x,1)=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}\equiv\Phi_n.$$

答：

$$x^2=\Phi_1+2\Phi_2,$$
$$x^3=\Phi_1+6\Phi_2+6\Phi_3,$$
$$x^4=\Phi_1+14\Phi_2+36\Phi_3+24\Phi_4.$$

例 5. 将 $\Phi_n(x-p,1)$ ($p>0$ 是整数)按阶乘多项式 $\Phi_m(x,1)$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 展开.

答：

$$\Phi_n(x-p,1)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_{n-m+p-1}^{p-1}\Phi_m(x,1).$$

我們还要举一个例子，它充分生动地表明了运用多项式按阶乘多项式展开是多么有效。

这例子就是多项式的求和法。

像积分法是微分法的逆运算一样，求和法是求差分的逆运算。这就是說，若給出方程式

$$\Delta F(x)=f(x), \tag{41}$$

其中 $f(x)$ 是已知函数，而 $F(x)$ 是未知函数，那么[設变数 x 在 $a+mh$ $(m=0,1,\cdots)$

中取值]这个方程的一般解是和数

$$F(x)=C+f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(x-h)$$

(C 是任意常数)。

实际上,

$$\Delta F(x)=F(x+h)-F(x)=[C+f(a)+f(a+h)+\cdots+f(x-h)+f(x)]-$$
$$-[C+f(a)+f(a+h)+\cdots+f(x-h)]=f(x).$$

由此推得,若已知方程(41)的任一特解[表为 $F(x)$],那么等式

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(x-h)=F(x)-F(a)$$

必成立,或者令 $x=a+nh$,它更可简写为

$$\sum_{m=0}^{n-1}f(a+mh)=F(a+nh)-F(a)=F(x)\Big|_a^{a+nh}. \tag{42}$$

現在注意这一情况,若 $f(x)$ 是多項式 $P(x)$,那么很容易得到方程(41)的特解:只要把 $P(x)$ 按阶乘 $\Phi_n(x-a,h)$ 展开,然后将阶乘的指标加上一,亦即从公式(39),我們得到

$$F(x)=P(a)\Phi_1(x-a,h)+\Delta P(a)\Phi_2(x-a,h)+\cdots+\Delta_n P(a)\Phi_{n+1}(x-a,h).$$

于是形如

$$\sum_{m=0}^{n-1}P(a+mh)$$

的和数根据公式(42)計算起来毫不困难。

例 6. 計算和数

$$S_n^{(2)}=\sum_{m=0}^{n-1}m^2,\quad S_n^{(3)}=\sum_{m=0}^{n-1}m^3\quad 与\quad S_n^{(4)}=\sum_{m=0}^{n-1}m^4.$$

从例 4 中得到的展开式可推出

$$S_n^{(2)}=\Phi_2+2\Phi_3\Big|_0^n=\frac{n(n-1)}{2!}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1),$$

$$S_n^{(3)}=\Phi_2+6\Phi_3+6\Phi_4\Big|_0^n=\frac{n(n-1)}{2!}+6\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+$$
$$+6\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=\frac{1}{4}n^2(n-1)^2,$$

$$S_n^{(4)}=\Phi_2+14\Phi_3+36\Phi_4+24\Phi_5\Big|_0^n=\frac{n(n-1)}{2!}+14\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+$$
$$+36\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+24\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}=$$

$$=\frac{1}{30}n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1).$$

11. 函数插补法. 表的应用 設已給某一函数 $f(x)$, 此外幷給出 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$. 在給出的各点处与所給函数 $f(x)$ 取相同値的 n 次多項式 $P(x)$

$$P(x_m)=f(x_m) \qquad (m=0,1,2,\cdots,n) \tag{43}$$

是关于函数 $f(x)$ 及点 x_m 的集合的拉格朗習插补多項式. 求多項式 $P(x)$ 的手續以及計算多項式在不是所給出的点 x 处的値的手續, 称为插补法; 函数 $f(x)$ 称为被插补的函数; 点 x_m 称为插补点或基点. 当然基点这个名詞是由于插补法在实数域內的几何解說而来: 因为多項式 $P(x)$ 在点 x_m 处的値与函数 $f(x)$ 的値相等, 而在其余的点处一般說来則不等, 故函数 $P(x)$ 与 $f(x)$ 的圖形在横坐标 x_m 处有共同点, 因此自然地称 x_m 为基点 (圖 8). 順便提出, 計算 $P(x)$ 在一点 x 处的値, 而 x 位于諸基点所形成的区間的范圍之外时, 有时称为外推法, 而把(狭义的)插补法(或內插补法)这一名称保留給 x 位于諸基点之間的情况. 我們沒有必要特别坚持这一区别.

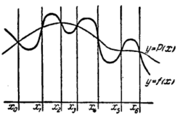


圖 8

插补理論起源于編纂与运用数学表的实践, 因而在这方面就有其最直接的应用. 若在表中沒有所給出的变量的値, 則为了計算对应的函数値必须根据下一前提而引用插补法; 即在用插补多項式替代函数时, 只会引起充分微小的誤差. 通常都是利用在表上与变量最接近的两个値 (左边的和右边的) 作为基点, 而采用綫性插补法 ($n=1$). 然而, 只有在表編纂得很詳細, 以致函数圖形在表上两相邻点間的一部分可以近似地算作是直綫时才可以这样做.

在另一些情况下 (当圖形的这一部分可以近似地算作是拋物綫的时候), 可以运用平方插补法($n=2$), 而在变量已知値的左边取两点、右边取一点作为基点, 或者在右边取两点、左边取一点作为基点. 有时二次插补法也不能給出令人滿意的精确結果.

需要指出, 函数插补法的問題用第 8 节所得到的公式已完全解决了. 事实上, 我們已經会作一个多項式, 使它在已知点 x_m 处取已知値 y_m, 不过点的个数必须等于多項式未定系数的个数. 为了得到滿足条件(43)的多項式, 现在我們只需設已知値 y_m 恰好正是被插补的函数 $f(x)$ 在 x_m 处的値 $f(x_m)$. 这样, 与函数 $f(x)$ 以及对应的基点 $x_m (m=0,1,2,\cdots,n)$ 相关联的拉格朗習插补多項式就有下列形状

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n} f(x_m)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)} \tag{44}$$

或

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n} f(x_m)\frac{A(x)}{(x-x_m)A'(x_m)},\qquad A(x)=\prod_{m=0}^{n}(x-x_m). \tag{45}$$

若已知被插补的函数 $f(x)$ 是周期函数(周期为 2π)，那么自然要采用三角插补法[1]。插补多项式 $T(x)$ 的对应公式可以从第 9 节公式(21)，(22)和(23)求得，而只要用被插补的函数的值 $f(x_m)$ 来代替数值 y_m；这些公式沒有必要再重写了。

再回到通常的拉格朗日插补法，我們来研究最重要的等距离基点的情况，在制表时常常遇到这情况；就是取

$$x_m=a+mh\quad(h\neq0;\ m=0,1,\cdots,n).$$

于是条件(43)成为

$$P(a+mh)=f(a+mh)\quad(m=0,1,\cdots,n); \tag{46}$$

又因在后面各点的函数值可以表示为在起始点的有限差，反之，函数在起始点的有限差也可表示为在后面各点处的函数值，所以这个条件与下面的条件完全等价：

$$\Delta_m P(a)=\Delta_m f(a)\quad(m=0,1,\cdots,n). \tag{47}$$

另一方面，用起始点的有限差表示任意多項式的公式(40)我們已經得到过；由此根据(47)求得未知多項式 $P(x)$ 为

$$P(x)=f(a)+\Delta f(a)\frac{x-a}{1!h}+\Delta_2 f(a)\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2}+\cdots+$$

$$+\Delta_n f(a)\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)}{n!h^n}. \tag{48}$$

这多項式名为牛頓插补多項式[2]，它与函数 $f(x)$ 及点 $a+mh\ (m=0,1,\cdots,n)$ 的集合相关联。

公式(14)和(48)彼此很不相像。然而剛才解决的問題是一般插补問題的一种特殊情况，而我們已看到在最一般的情况下，这問題只有一个解。由此不經直接驗証便可明了，公式(14)(其中 $x_m=a+mh; m=0,1,\cdots,n$) 和(48)的右端彼此恒等。仅仅是集項的方法上不同而已。拉格朗日多項式是按前面(第 8 节)記作 $P_m(x)$ 的多項式展开的，其系数是函数在各个点处的值；而牛頓多項式是按阶乘 $\Phi_m(x-a;h)$ 展开的，其系数是在起始点处的各有限差。实际上，对于等距离基点，应用牛頓公式方便得多，特别是因为假若想要改善近似程度，不变原来的基点而增加一个新基点，使多項式的

1) 因为要求出函数在整个周期中的而不是在某一部分区間中的近似表示。

2) J. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica (1687)，卷 3，預备定理 5，第一个情况。又見 Methodus differentialis (1711)。事实上，公式(48)是屬于格雷哥里(1670)的。

次数和基点的个数各增加一，那么，从(48)可见，在牛頓多項式中只需要計算一項，而在拉格朗智公式(14)中就需要重新再計算。

例 1. 綫性插补法．設

$$n=1 \quad 和 \quad a<x<a+h,$$

就得到

$$P(x)=f(a)+\Delta f(a)\frac{x-a}{h},$$

由此推得[忽略誤差不計，即認为 $f(x)=P(x)$]：

$$\frac{f(x)-f(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{x-a}{h}. \tag{49}$$

这公式表示通常的"比例部分"的規則，一切要用表的人都几乎自动地遵循这一規則．

例 2. 平方插补法．若有根据認为綫性插补法不能給出足够的精确性，那就可以运用平方插补公式($n=2$)：

$$P(x)=f(a)+\Delta f(a)\frac{x-a}{h}+\Delta_2 f(a)\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2},$$

在这里已将"修正項"

$$\frac{1}{2}\{[f(a+2h)-f(a+h)]-[f(a+h)-f(a)]\}\frac{(x-a)(x-a-h)}{h^2}$$

添加在綫性插补的結果上．起始点 a 可以有两个选取的方法：若在表中有 x 的已知值

$$\cdots p, q, r, s, \cdots,$$

而且所考虑的 x 值位于 q 与 r 之間，那么可以令：

1) $a=q, \quad a+h=r, \quad a+2h=s$

或者

2) $a=p, \quad a+h=q, \quad a+2h=r;$

当 $x>\frac{q+r}{2}$ 时，第一种方法較方便；当 $x<\frac{q+r}{2}$ 时，第二种方法較方便．是不是需要二次修正項，有时这样来决定：即将这修正項实际計算出来，并按它的絕对值的大小来决定．

例 3. 利用从 1 到 100 的自然数的五位常用对数表来計算 $\lg_{10}12.7$．

从表中得到下列数据：

x	$\lg_{10}x$	Δ	Δ_2
12	07918	3476	-257
13	11394	3219	
14	14613		

綫性插补的結果是：

$$1.07918+0.03476\cdot\frac{0.7}{1}=1.10351.$$

二次修正項为：

$$-\frac{1}{2}\cdot 0.00257(0.7)(-0.3)=0.00027.$$

平方插补的結果是：1.10378．

例 4. 根据1930年的"航海历"表来計算1月13日1时45分(夜)月亮的坐标.表上給出了:

1930年1月13日的月亮

时	直升			偏差		
	h	m	s	°	′	″
1	5	38	41.94	26	58	49.8
2	5	41	29.53	27	2	23.7
3	5	44	17.45	27	5	45.3

計算直升:

	h	m	s		h	m	s
$f(a)=$	5	38	41.94	$f(a)=$	5	38	41.94
$\Delta f(a)=$		2	47.59	$\Delta f(a)\dfrac{x-a}{h}=$		2	5.69
$\Delta_2 f(a)=$			0.33	$\dfrac{1}{2}\Delta_2 f(a)\dfrac{(x-a)(x-a-h)}{h^2}=$			−0.03
					5	40	47.60

計算偏差:

	°	′	″		°	′	″
$f(a)=$	26	58	49.8	$f(a)=$	26	58	49.8
$\Delta f(a)=$		3	33.9	$\Delta f(a)\dfrac{x-a}{h}=$		2	40.4
$\Delta_2 f(a)=$			−12.3	$\dfrac{1}{2}\Delta_2 f(a)\dfrac{(x-a)(x-a-h)}{h^2}=$			1.1
					27	1	31.3

以下例子中的数据采自楊格和爱姆特的表1).

例 5. 計算拉普拉斯积分

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

当 $x=1.237$ 时的值. 我們从表中找出函数 $\Phi(x)$ 的值如下:

x	Φ	$\Delta\Phi$
1.20	0.9103	
		27
1.21	0.9130	
		25
1.22	0.9155	
		26
1.23	0.9181	
		24
1.24	0.9205	
		24
1.25	0.9229	
		23
1.26	0.9252	

1) Э. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

因为有限差 $\Delta\Phi$ 变化得充分平稳，所以利用綫性插补法就够了．由此得出結果：

$$\Phi(1.237)=0.9198.$$

例 6. 計算正弦积分

$$\mathrm{Si}\ x=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$$

当 $x=2.175$ 时的值．表上給出了：

x	Si x	Δ	Δ_2
2.0	1.6054		
		433	
2.1	1.6487		−44
		389	
2.2	1.6876		−43
		346	
2.3	1.7222		

用綫性插补法得出：

$$\mathrm{Si}\ 2.175=1.6779.$$

用平方插补法(以 2.1, 2.2 和 2.3 为基点)得出：

$$\mathrm{Si}\ 2.175=1.6783.$$

例 7. 計算弗雷涅积分

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

当 $x=10.2$ 的值．从表中取出数据

x	S	ΔS	$\Delta_2 S$	$\Delta_3 S$
9.5	0.6286			
		−202		
10.0	0.6084		−250	
		−452		11
10.5	0.5632		−130	
		−584		
11.0	0.5048			

以 10.0 和 10.5 为基点的綫性插补結果：

$$S(10.2)=0.5903.$$

以 9.5, 10.0 和 10.5 为基点的平方插补給出：

$$S(10.2)=0.5933.$$

最后，用有四个基点的三次多項式插补时，得到

$$S(10.2)=0.5926.$$

12. 差分比的插补公式 如我們所已論証的，在等距离基点的情况下，牛頓公式

比拉格朗習公式优越得多，这就是說：它是这样建立起来的，以致添加一个新的基点时只需計算一項。这样就發生一个問題：能不能将拉格朗習公式改造成这样，使得在任意基点的一般情况下，上述性質依然存在呢？我們将看到这是可能的：为此，只要把插补多項式 $P(x)$ 写成

$$P(x)=c_0A_0(x)+c_1A_1(x)+c_2A_2(x)+\cdots+c_nA_n(x), \tag{50}$$

其中

$$A_0(x)\equiv 1,\quad A_m(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{m-1})\quad (m=1,2,\cdots,n).$$

对于任何 n 次多項式 $P(x)$，这种表示法是可以实现的，而且，只有一种这样的方法，这一点不需要証明；我們只需要找出計算系数 c_m 的方便的方法。

設 $f(x)$ 是任意函数。引进縮簡的記号：

$$\left.\begin{aligned}
&\omega(f;x_0)=f(x_0),\\
&\omega(f;x_0,x_1)=\frac{\omega(f;x_1)-\omega(f;x_0)}{x_1-x_0},\\
&\omega(f;x_0,x_1,x_2)=\frac{\omega(f;x_1,x_2)-\omega(f;x_0,x_1)}{x_2-x_0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{\omega(f;x_1,x_2,\cdots,x_n)-\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})}{x_n-x_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

数量 $\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)$ 称为 $m(m=0,1,\cdots)$ 級差分比，計算它儿乎像計算逐級有限差一样简单。运算法可方便地安排成下表：

x_0	$\omega(f;x_0)$			
		$\omega(f;x_0,x_1)$		
x_1	$\omega(f;x_1)$		$\omega(f;x_0,x_1,x_2)$	
		$\omega(f;x_1,x_2)$		$\omega(f;x_0,x_1,x_2,x_3)$
x_2	$\omega(f;x_2)$		$\omega(f;x_1,x_2,x_3)$	
		$\omega(f;x_2,x_3)$		
x_3	$\omega(f;x_3)$			
…	…………	…………	…………	…………

显然，差分比 $\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 能用函数 $f(x)$ 在点 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 处的值綫性地表达出来，反过来也是如此。

由此得到

$$\begin{aligned}
&\omega(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_kf_k;x_0,\cdots,x_m)=\\
&\qquad=c_1\omega(f_1;x_0,\cdots,x_m)+c_2\omega(f_2;x_0,\cdots,x_m)+\cdots+c_k\omega(f_k;x_0,\cdots,x_m).
\end{aligned}\tag{52}$$

确定差分比的公式(51)具有遞推的性質，但也可以求出非遞推公式：

$$\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m\\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_m^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1}\\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_m)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m\\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_m^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1}\\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_m^m\end{vmatrix}, \tag{53}$$

这很容易用完全归納法来証明.

从公式(53)可很清楚地看到，$\omega(f;x_0, x_1,\cdots, x_m)$是文字$x_0,x_1,\cdots,x_m$的对称函数，即把这些文字作任意置换时函数不变．同时这公式又指出

$$\omega(x^k;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\begin{cases}0, & 当k<m时,\\ 1, & 当k=m时;\end{cases}$$

由此可知，若$f(x)$是小于m次的多項式，则$\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)$为零.

回到展开式(50)．若注意到

$$\omega(A_k;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\begin{cases}0, & 当 k\neq m 时,\\ 1, & 当 k=m 时;\end{cases} \tag{54}$$

系数c_k立刻就被确定了.

事实上，若$k<m$，那么等式(54)可从刚才所作的說明推得；若$k=m$，那么$\omega(A_m;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\omega(x^m;x_0,x_1,\cdots,x_m)=1$；最后，若$k>m$，则$\omega(A_k;x_0,x_1,\cdots,x_m)$为零，因为这式子能够用$A_k(x_0),A_k(x_1),\cdots,A_k(x_m)$綫性地表示出来，而这些数量都等于零.

借助公式(52)和(54)，从(50)得到：

$$\omega(P;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\sum_{k=0}^{n}c_k\omega(A_k;x_0,x_1,\cdots,x_m)=c_m \qquad (m=0,1,\cdots,n),$$

而将值c_m代入恒等式(50)就得出：

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}\omega(P;x_0,x_1,\cdots,x_m)A_m(x). \tag{55}$$

又因为插补問題的条件

$$P(x_m)=f(x_m) \qquad (m=0,1,\cdots,n)$$

与条件

$$\omega(P;x_0,x_1,\cdots,x_m)=\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m) \qquad (m=0,1,\cdots,n)$$

等价，所以我們得到一个依賴于差分比的插补公式：

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)A_m(x), \tag{56}$$

或者写开来就是

$$P(x)=\omega(f;x_0)+\omega(f;x_0,x_1)(x-x_0)+\omega(f;x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+$$
$$+\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \qquad (57)$$

我們預先知道，等式(14)和(57)的右端是恒等的，于是在我們面前的就是按照差分比集項的拉格朗智插补多項式。特别注意，在等距离基点 $x_m=a+mh$ 的情况下，差分比与各級有限差很簡单地关联如下：

$$\omega(f;a,a+h,\cdots,a+mh)=\frac{\Delta_m f(a)}{m!h^m}, \qquad (58)$$

这时公式(57)変成了牛頓公式(48)[1]。

附注. 根据多項式(50)，把有理多項式按"广义阶乘" $A_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ 展开，还有另一种也很方便的方法，这就是进行逐次相除法。将 $P(x)$ 除以 $x-x_0$；得到的商再除以 $x-x_1$，以后又除以 $x-x_2$，如此繼續下去。从公式(50)中可見，余数 c_0, c_1, c_2 等等就一个接一个得出来了。

例 1. 根据差分比公式展开多項式 $P(x)=x^4-3x^3+x^2-10$，但令

$$x_0=1,\quad x_1=3,\quad x_2=-2,\quad x_3=0,\quad x_4=-1.$$

作差分比的表：

1	−11				
		5			
3	−1		4		
		−7		−1	
−2	34		5		1
		−22		−3	
0	−10		17		
		−5			
−1	−5				

我們立刻写出展开式：

$$x^4-3x^3+x^2-10=-11+5(x-1)+4(x-1)(x-3)-(x-1)(x-3)(x+2)+$$
$$+(x-1)(x-3)(x+2)x.$$

用逐次相除法也能得到同一結果(不記 x 的次数，只写系数)：

```
1-3  1  0-10 |1-1
1-1           -------------
----          1-2-1-1 |1-3
 -2  1        1-3      --------
 -2  2        ----     1  1  2 |1  2
------           1-1   1  2     -------
    -1  0        1-3   -------  1-1 |1  0
    -1  1        -----   -1  2  1  0 ------
-----------         2-1  -1-2   ----  1
       -1-10        2-6  -----   -1
       -1  1        ----     4
-----------            5
          11
```

1) 差分比公式是牛頓所指出的 (Principia mathematica, 卷3, 預备定理 5, 第二情况)。哥西也有过这一公式 (A. Cauchy, Oeuvres (1)5, 第 409 頁)。为差分比引进記号当归功于安倍(1826)。

例 2. 根据数据

$$\sqrt{25}=5,\quad \sqrt{36}=6,\quad \sqrt{49}=7$$

近似計算$\sqrt{41}$. 关于函数$f(x)=\sqrt{x}$与对应基点 $x_0=25$, $x_1=36$, $x_2=49$, 作二次插补多項式 $P(x)$. 我們得到:

25	5		
		$\frac{1}{11}$	
36	6		$-\frac{1}{1716}$
		$\frac{1}{13}$	
49	7		

$$P(x)=5+\frac{1}{11}(x-25)-\frac{1}{1716}(x-25)(x-36).$$

代入 $x=41$, 就得到根式的近似值

$$\sqrt{41}\approx\ 5+\frac{16}{11}-\frac{20}{429}=6.4079\cdots$$

(根式眞正的值等于 6.403).

上面的叙述假定了数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ 不相等; 在相反的情况下, $\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_m)$的表达式(53)失掉了直接的意义.

然而, 很容易明白当变元x_i中有某些相等时, 应該給表达式$\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_m)$以怎样的值; 只要在公式(51)中进行必要的極限过程, 同时假定函数$f(x)$具有对应的导数即可.

例如, 設x_1等于x_0, 而其他的x_i异于x_0, 且彼此不相等. 那么令$x_1=x_0+h$, 并命h趋于零, 于是我們就得到在公式(51)中第二行为

$$\omega(f; x_0, x_0)=f'(x_0)$$

(其余的保留不变).

公式(53)成为

$$\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_m)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots 1\\ x_0 & 1 & \cdots x_m\\ x_0^2 & 2x_0 & \cdots x_m^2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{m-1} & (m-1)x_0^{m-2} & \cdots x_m^{m-1}\\ f(x_0) & f'(x_0) & \cdots f(x_m)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots 1\\ x_0 & 1 & \cdots x_m\\ x_0^2 & 2x_0 & \cdots x_m^2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{m-1} & (m-1)x_0^{m-2} & \cdots x_m^{m-1}\\ x_0^m & mx_0^{m-1} & \cdots x_m^m\end{vmatrix}.$$

在这种情况下, 在公式(56)中的插补多項式$P(x)$除有$f(x)$在$x_0, x_1, \cdots, x_m$处的值外, 还包含导数$f'(x)$在x_0处的值.

用同样的方法可以确定，若 $x_1=x_2=\cdots=x_p=x_0(p\leqslant m)$，那么

$$\omega(f;\underbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}_{p+1\text{个}})=\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}.$$

这时在公式(56)的右端将会出現导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(p)}(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值．特別，若 $p=n$，便得泰乐多項式．

13. 有重基点的插补法．厄米特公式 我們来討論厄米特[1])所提出的插补問題的下述推广：

要求作一 n 次多項式，在 s 个不同的点 $x_k(k=1,2,\cdots,s)$ 处連同它的 $h\ (h=0,1,\cdots,\alpha_k-1)$ 級导数[2])按下列条件取已知值 $y_k^{(h)}$：

$$P^{(h)}(x_k)=y_k^{(h)}\qquad\begin{cases}(h=0,1,\cdots,\alpha_k-1),\\(k=1,2,\cdots,s),\end{cases}\tag{59}$$

并且假設

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=n+1.$$

若能作出 n 次多項式

$$L_{ik}(x)\qquad\begin{cases}(i=1,2,\cdots,s)\\(k=0,1,\cdots,\alpha_i-1)\end{cases}$$

使滿足条件

$$L_{ik}^{(h)}(x_m)=0\qquad(m\neq i;\qquad h=0,1,\cdots,\alpha_m-1)\tag{60}$$

并且

$$L_{ik}^{(h)}(x_i)=\begin{cases}0,&\text{当 } h\neq k\\1,&\text{当 } h=k\end{cases}\qquad(h=0,1,\cdots,\alpha_i-1),\tag{61}$$

那么所提出的問題在普遍情况下就可以解决了．事实上，一般問題的解將是下一多項式：

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[y_iL_{i0}(x)+y_i'L_{i1}(x)+\cdots+y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}(x)\right].\tag{62}$$

如何作多項式 $L_{ik}(x)$ 呢？

由(60)，它在点 x_1 处必須有 α_1 級零点，在 x_2 处必須有 α_2 級零点，等等，最后，在 x_s 处有 α_s 級零点，但由(61)，在 x_i 处必須有 k 級零点．所以 $L_{ik}(x)$ 必定有下列形

1) Ch. Hermite [1].

2) 以后把函数本身看作零級导数：

$$f^{(0)}(x)=f(x).$$

状：

$$L_{ik}(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x-x_i)^k(x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}l_{ik}(x),\tag{63}$$

其中 $l_{ik}(x)$ 是 $n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+k+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_s)=\alpha_i-k-1$ 次多項式。令

$$A(x)=\prod_{\nu=1}^{s}(x-x_\nu)^{\alpha_\nu},$$

我們可以把 $L_{ik}(x)$ 改写成这种形式：

$$L_{ik}(x)=\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-k}}l_{ik}(x).\tag{64}$$

为了确定 $l_{ik}(x)$，再回到条件(61)，由此推得，多項式 $L_{ik}(x)$ 在点 x_i 附近的泰乐展开式有下列形状：

$$L_{ik}(x)=\frac{(x-x_i)^k}{k!}[1+\sigma(x-x_i)^{\alpha_i-k}+\cdots].\tag{65}$$

于是借助公式(64)得出多項式 $l_{ik}(x)$ 的下列表达式：

$$l_{ik}(x)=\frac{1}{k!}\,\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}+\sigma'(x-x_i)^{\alpha_i-k}+\cdots.\tag{66}$$

有理函数 $\frac{1}{k!}\,\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}$ 在点 x_i 附近是正則的，因此可展为 $x-x_i$ 的泰乐級数；另一方面，函数 $l_{ik}(x)$ 必定是 α_i-k-1 次多項式，这多項式不能是別的，恰好就是函数 $\frac{1}{k!}\,\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}$ 在点 x_i 附近的泰乐級数展开式中次数不超过 α_i-k-1 的各項的和。我們把这簡記如下：

$$l_{ik}(x)=\frac{1}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}.$$

反过来，这样选取的多項式 $l_{ik}(x)$ 当然保証了 $L_{ik}(x)$ 有形如公式(65)的展开式，因此条件(60)—(61)成立。

这样我們得到了：

$$L_{ik}(x)=\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\,\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)},$$

因此一般公式(62)成为：

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\left[y_i\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-1)}+y_i'\,\frac{x-x_i}{1!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-2)}+\cdots+\right.$$
$$\left.+y_i^{(\alpha_i-1)}\frac{(x-x_i)^{\alpha_i-1}}{(\alpha_i-1)!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(0)}\right],\tag{67}$$

或者

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}y_i^{(k)}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}\right]. \qquad (68)$$

若 $y_k^{(h)}$ 恰好是已知函数 $f(x)$ 在相应点处的对应导数值，那么就得到下列插补公式的最一般形式：

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}f^{(k)}(x_i)\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}\right]. \qquad (69)$$

当 α_i 大于 1 时，点 x_i 称为插补(α_i 級)重基点.

1) 設一切相重数 α_i 都等于 1，即是一切基点为简单的．那么，不得不也令 k 等于零，我們就得到：

$$\left\{\frac{x-x_i}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{(0)}=\frac{1}{A'(x_i)},$$

其中

$$A(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s),$$

而公式(69)变成了熟知的拉格朗日公式

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}f(x_i)\frac{A(x)}{(x-x_i)A'(x_i)}.$$

2) 設仅有一个 α 重的基点 $x=a$．那么 $A(x)=(x-a)^\alpha$，而替代(69)，我們得到了函数 $f(x)$ 在点 a 附近的泰乐展开式的部分和：

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

3) 設一切相重数 α_i 等于 2．由等式

$$P(x_k)=f(x_k)$$
$$P'(x_k)=f'(x_k) \qquad (k=1,2,\cdots,s)$$

所确定的插补問題的几何意义就在于：要使插补曲綫在基点上与已知曲綫 $y=f(x)$ 有公切綫．在这一次，設

$$a(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s),$$

我們得到：

$$A(x)=a^2(x), \qquad \frac{(x-x_i)^2}{A(x)}=\left[\frac{x-x_i}{a(x)}\right]^2;$$

又因为

$$\frac{x-x_i}{\alpha(x)}=\frac{1}{\alpha'(x_i)}-\frac{1}{2}\frac{\alpha''(x_i)}{\alpha'^2(x_i)}(x-x_i)+\cdots,$$

$$\left[\frac{x-x_i}{\alpha(x)}\right]^2=\frac{1}{\alpha'^2(x_i)}-\frac{\alpha''(x_i)}{\alpha'^3(x_i)}(x-x_i)+\cdots,$$

故公式(69)成为：

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha^2(x)}{\alpha'^2(x_i)(x-x_i)^2}\left[f(x_i)\left(1-\frac{\alpha''(x_i)}{\alpha'(x_i)}(x-x_i)\right)+f'(x_i)(x-x_i)\right].\quad(70)$$

例 1. 按下列条件

$$P(0)=1,\qquad P(1)=-1,\quad P(2)=0,$$
$$P'(0)=0,\qquad P'(1)=0,$$
$$P''(0)=2$$

作一五次多项式 $P(x)$. 这时需令

$$A(x)=x^3(x-1)^2(x-2).$$

由于

$$\frac{x^3}{A(x)}=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}x^2+\cdots$$

$$\frac{(x-1)^2}{A(x)}=\frac{1}{x^3(x-2)}=-1+2(x-1)+\cdots,$$

$$\frac{x-2}{A(x)}=\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{1}{8}+\cdots,$$

我們立刻可以写出：

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)\left[1\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}x^2\right)+2\cdot\frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+$$
$$+x^3(x-2)[(-1)\cdot(-1+2(x-1))]=1+x^2-\frac{117}{8}x^3+\frac{65}{4}x^4-\frac{37}{8}x^5.$$

例 2. 令 $f(x)=\sin x$, 試根据下列数据

$$f(0)=0,\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$f'(0)=1,\qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

近似計算 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$.

这时宜于应用公式(70). 令

$$\alpha(x)=x\left(x-\frac{\pi}{2}\right);$$

于是我們就得到三次插补多項式：

$$P(x)=x\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2+\frac{4x^2}{\pi^2}\left(3-\frac{4x}{\pi}\right).$$

由此便得：

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{16}=0.696\cdots$$

（真正的值为 0.707…）.

例 3. 作一五次多项式滿足下列条件：

$$P(-1)=-1,\qquad P(0)=0,\qquad P(1)=1,$$
$$P'(-1)=P'(0)=P'(-1)=0.$$

答：
$$P(x)=\frac{1}{2}x^3(5-3x^2).$$

例 4. 取契比謝夫多項式 $T_n(x)=\cos n\arccos x$ 的零点作基点，写出公式(70).

令

$$\alpha(x)=\dot{T}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x,$$

$$x_m=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n}\qquad (m=1,2,\cdots,n),$$

我們得到：

$$\alpha'^2(x_m)=\frac{1}{2^{2(n-1)}}\cdot\frac{n^2}{1-x_m^2},\qquad \frac{\alpha''(x_m)}{\alpha'(x_m)}=\frac{x_m}{1-x_m^2},$$

而公式(70)成为

$$P_n(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{T(x)}{x-x_m}\right)^2[f(x_m)(1-xx_m)+f'(x_m)(1-x_m^2)(x-x_m)].\tag{71}$$

例 5. 令 $P(x)=\sum_{m=0}^{n}c_mx^m$，把此式代入条件(59)，試計算由此所产生的未知数 c_m 所組成方程組的行列式；驗証方程組的行列式不为零.

14. 綫性泛函数及与其相关多項式的正交系 現在我們来研究更一般的問題，与其說它是在原来意义下的推广，毋宁說它是以前叙述的系統化.

若对任一(确定类中的)函数 $f(x)$ 有某数 U 与它相对应，常常称这数为泛函数，同时記为 $U(f)$. 泛函数的例子有：

$$U(f)=f(x_0),\qquad U(f)=\int_a^b f(x)d\psi(x),$$

$$U(f)=Af(a)+Bf(b),\qquad U(f)=\int_a^b f^2(x)dx$$

等等. 若泛函数滿足关系式

$$1)\quad U(f+g)=U(f)+U(g),\qquad 2)\quad U(Cf)=CU(f)\tag{72}$$

(其中 C 是任意常数),那么称它为綫性的.

上面所举的泛函数例子中,前三个是綫性的,最后一个是非綫性的. 有限差、差分比、函数 $f(x)$ 在已知点处的导数的值都是綫性泛函数.

泛函数

$$V(f)=\lambda_1 U_1(f)+\lambda_2 U_2(f)+\cdots+\lambda_n U_n(f)$$

称为泛函数 $U_m(f)$ $(m=1,2,\cdots,n)$ 的綫性組合.

若泛函数系 $\{V_m(f)\}$ 与泛函数系 $\{U_m(f)\}$ 是由关系式

$$V_m(f)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{m,\nu}\,U_\nu(f)\qquad(m=1,2,\cdots,n)$$

相关联,其中行列式

$$A=\begin{vmatrix}\lambda_{11}\cdots\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_{n1}\cdots\lambda_{nn}\end{vmatrix}$$

异于零,我們就認为系 $\{V_m(f)\}$ 与系 $\{U_m(f)\}$ 是等价的. 若泛函数系 $\{V_m(f)\}$ 与系 $\{U_m(f)\}$ 等价,則当然系 $\{U_m(f)\}$ 与系 $\{V_m(f)\}$ 也等价.

規定这些术語后,我們来研究下一問題:給出 $n+1$ 个綫性泛函数 $\{U_m(f)\}$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 的系;要求选擇一 n 次多項式 $P(f;x)$,使已知泛函数对这多項式与对于已知函数 $f(x)$ 有同样的值:

$$U_m(P)=U_m(f)\qquad(m=0,1,\cdots,n).\tag{73}$$

設未知多項式 $P(f;x)$ 为

$$P(f;x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$$

由于泛函数 $U_m(f)$ 是綫性的,条件(73)成为:

$$c_0U_m(1)+c_1U_m(x)+c_2U_m(x^2)+\cdots+c_nU_m(x^n)=U_m(f)$$
$$(m=0,1,\cdots,n).$$

若行列式

$$U_n=\begin{vmatrix}U_0(1) & U_0(x)\cdots U_0(x^n)\\ U_1(1) & U_1(x)\cdots U_1(x^n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ U_n(1) & U_n(x)\cdots U_n(x^n)\end{vmatrix}\tag{74}$$

异于零,則所得含 $n+1$ 个未知数的 $n+1$ 个綫性方程的系有一組且只有一組解.

在这种情况下,未知多項式 $P(f;x)$ 就可用下面的公式給出:

$$P(f;x)=-\begin{vmatrix}0 & 1 & x & \cdots & x^n\\ U_0(f) & U_0(1) & U_0(x) & \cdots & U_0(x^n)\\ U_1(f) & U_1(1) & U_1(x) & \cdots & U_1(x^n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_n(f) & U_n(1) & U_n(x) & \cdots & U_n(x^n)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}U_0(1) & U_0(x) & \cdots & U_0(x^n)\\ U_1(1) & U_1(x) & \cdots & U_1(x^n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_n(1) & U_n(x) & \cdots & U_n(x^n)\end{vmatrix}. \quad (75)$$

若将分子中的行列式依第一列展开，則可断定多項式 $P(f;x)$ 是泛函数 $U_m(f)$ 与 n 次多項式的乘积的和，每一个这样的多項式一般說来不仅与指标 m 有关，而且也与次数 n 有关.

現在假設一系列的行列式全异于零：

$$U_m\neq 0 \qquad (m=0,1,\cdots,n). \quad (76)$$

我們断言，在这条件下，可以用唯一的方法选出泛函数系 $V_m(f)$ 及 m 次多項式 $L_m(x)(m=0,1,\cdots,n)$ 的系，使得 n 次任意多項式 $P(x)$ 可以表示成为和式

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n} V_m(P)L_m(x), \quad (77)$$

而要求：

1) 泛函数系 $V_m(f)$ 与系 $U_m(f)$ 等价，而且有关系式

$$V_m(f)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{mk}U_k(f) \qquad (m=0,1,\cdots,n),$$

2) m 次多項式 $L_m(x)$ 中 x^m 的系数等于 $1(m=0,1,\cdots,n)$，且与 n 無关.

注意，若 $V_m(f)$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 是与系 $U_m(f)$ 等价的一泛函数系，那么由多項式 $P(x)$ 所滿足的条件(73)，可推得

$$V_m(P)=V_m(f) \qquad (m=0,1,\cdots,n), \quad (78)$$

反过来也是如此.

由是应得，若証明了上面的假設，那么多項式 $P(f;x)$ 可以写成

$$P(f;x)=\sum_{m=0}^{n} V_m(f)L_m(x), \quad (79)$$

其中多項式 $L_m(x)$ 与 n 無关.

我們首先来导出使展开式(77)成立的必要与充分条件. 令 $P(x)\equiv L_k(x)(0\leqslant k\leqslant n)$；于是得到

$$L_k(x)=\sum_{m=0}^{n} V_m(L_k)L_m(x),$$

又因多項式 $L_m(x)$ 綫性無关，所以由此必定得到：

$$V_m(L_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } k\neq m \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } k=m \text{ 时}\end{cases}\qquad (k, m=0,1,\cdots,n). \tag{80}$$

反过来，若条件(80)成立，那么展开式(77)对于任何 n 次多項式 $P(x)$ 成立。实际上，多項式 $P(x)$ 可以用多項式 $L_k(x)$ 綫性地表达出来：

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x),$$

而应用泛函数 $V_m(f)$ 到这等式两端，由(80)就得

$$c_m=V_m(P).$$

泛函数 $V_m(f)$ 与多項式 $L_m(x)$ 之間的关系式(80)称为**正交条件**。

剩下来的是要指出，如何作出泛函数 $V_m(f)$ 及多項式 $L_m(x)$，使正交条件得以满足。

因为任何次冪 $x^h(h\leqslant n)$ 都可以用多項式 $L_m(x)$ 綫性地表达，而且最高次多項式 $L_k(x)$ 的系数是 1，所以泛函数 $V_m(f)$ 一定应該滿足条件

$$V_m(x^h)=\begin{cases}0, & \text{当 } h<m \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } h=m \text{ 时}.\end{cases} \tag{81}$$

由此得到确定系数 $\lambda_{mk}(k=0,1,\cdots,m)$ 的方程：

$$\sum_{k=0}^{m}\lambda_{mk}U_k(x^h)=\begin{cases}0, & \text{当 } h=0,1,\cdots,m-1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } h=m \text{ 时}.\end{cases}$$

此函数系的行列式 U_m 不为零，因此系数 λ_{mk} 与泛函数 $V_m(f)$ 可唯一地被确定。即是：

$$V_m(f)=\begin{vmatrix}U_0(1) & U_1(1) & \cdots U_m(1)\\ U_0(x) & U_1(x) & \cdots U_m(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ U_0(x^{m-1}) & U_1(x^{m-1}) & \cdots U_m(x^{m-1})\\ U_0(f) & U_1(f) & \cdots U_m(f)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}U_0(1) & U_1(1) & \cdots U_m(1)\\ U_0(x) & U_1(x) & \cdots U_m(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ U_0(x^m) & U_1(x^m) & \cdots U_m(x^m)\end{vmatrix}. \tag{82}$$

至于談到多項式 $L_k(x)$，則它們应該滿足条件

$$V_m(L_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } m<k \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } m=k \text{ 时}\end{cases}\qquad (k=0,1,\cdots,n).$$

令

$$L_k(x)=\sum_{l=0}^{k}\gamma_{kl}x^l \qquad (\gamma_{kk}=1),$$

我們得到确定 $\gamma_{kl}(l=0,1,\cdots,n)$ 的方程

$$\sum_{l=0}^{k}\gamma_{kl}V_m(x^l)=\begin{cases}0, & \text{当 } m<k \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } m=k \text{ 时}.\end{cases}$$

又因为这个系的行列式[由于(81)]等于 1，所以系数 γ_{kl} 連同多項式 $L_k(x)$ 可唯一地被确定．即是：

$$L_k(x)=\begin{vmatrix} 1 & V_0(x)\cdots V_0(x^{k-1}) & V_0(x^k)\\ 0 & 1 \quad \cdots V_1(x^{k-1}) & V_1(x^k)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 \quad \cdots 1 & V_{k-1}(x^k)\\ 1 & x \quad \cdots x^{k-1} & x^k \end{vmatrix}\qquad (k=0,1,\cdots,n). \tag{83}$$

剩下还要驗証

$$V_m(L_k)=0, \qquad \text{当 } m>k;$$

而此式可直接从(83)与(81)推得．

若想应用上述理論到这样的特殊情况，即泛函数 $U_m(f)$ 正是已知点(彼此不同)处的函数值

$$U_m(f)\equiv f(x_m) \qquad (m=0,1,\cdots,n),$$

那么可断定行列式 U_m 正是房德莽行列式，因而异于零；公式(82)的右端变为公式(53)的右端，于是

$$V_m(f)\equiv\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m).$$

至于 $L_k(x)$，也可按照(83)推得：

$$L_k(x)=\begin{vmatrix} 1 & \omega(x;x_0)\cdots\omega(x^{k-1};x_0) & \omega(x^k;x_0)\\ 0 & 1 \quad \cdots\omega(x^{k-1};x_0,x_1) & \omega(x^k;x_0,x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 1 & \omega(x^k;x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})\\ 1 & x \quad \cdots \quad x^{k-1} & x^k \end{vmatrix}=A_k(x);$$

此式極容易肯定其为真，只要(用行列式的行的加法和减法)驗証数值 $x=x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 使行列式为零．

这样就得出差分比的插补公式．

15. 拉格朗習插补公式中的誤差估計．哥西形的余項 插补公式是用来表写函数，并且用来計算函数的值．但这一表写只是近似的而已．事实上，按照拉格朗習公式(14)插补时，我們是把已知函数 $f(x)$ 換作了一个 n 次插补多項式 $P(x)$，此多項式与已知函数在 $n+1$ 点处相等．当然，若函数 $f(x)$ 本身是 n 次多項式，則 $P(x)$ 恒等

于$f(x)$．但在一般情况下，在非基点的点x处，差数$f(x)-P(x)$异于零而成为計算的誤差．这个差数称为插补法的余項；我們将用字母R来表示它：

$$f(x)-P(x)=R(x).$$

在上述各例中，插补的誤差在一些例子中較大，在另外一些例子中較小，而它究竟怎样的，这个問題仍旧悬而未决．

任一近似数字計算只是在知道可能誤差的界限时才有实际价值．因而我們当前的任务是估計插补誤差，即是找出它的范圍．誤差絕对值不会超过的任何正数称为誤差的范圍．当然，所得到的誤差范圍越小，誤差的估計就越好．

因此，我們需要找到这样的数N，使未知誤差$R(x)$的絕对值不超过N：

$$|R(x)|\leqslant N.$$

我們将根据洛尔定理：

"若$F(a)=F(b)=0(a<b)$，則存在有点$\xi(a<\xi<b)$使得$F'(\xi)=0$"，

以及洛尔定理的推广：

"若$F(x_m)=0(m=0,1,\cdots,n)$，其中$x_0<x_1<\cdots<x_n$，則存在有点$\xi(x_0<\xi<x_n)$使得$F^{(n)}(\xi)=0$"[1]．

設x是自变数的值，而要求計算在該处的函数值．将x算作异于諸插补基点$x_m(m=0,1,\cdots,n)$的常数，引进变数X．令

$$K=\frac{R(x)}{A(x)}, \tag{84}$$

其中$R(x)$是余項，而$A(x)$和以前一样由下一公式确定：

$$A(X)=(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_n).$$

考察新的函数：

$$F(X)\equiv R(X)-KA(X)\equiv f(X)-P(X)-KA(X). \tag{85}$$

函数$F(X)$在下列$n+2$个点处为零：1)在基点x_m处，因为$R(x_m)=0$且$A(x_m)=0$ $(m=0,1,\cdots,n)$；2)在所討論的点x处，这是由于公式(84)．这样，

$$F(x_m)=0 \qquad (m=0,1,\cdots,n), \qquad F(x)=0.$$

用α和β分别表示数

$$x_0,x_1,\cdots,x_n \quad 与 \quad x$$

1) 在洛尔定理中假定了函数$F(x)$在区間$a<x<b$的一切点处有导数$F'(x)$；在其推广定理中，則相应地假定了有n次导数$F^{(n)}(x)$．

在两种情况下点ξ都不必为唯一的．

中的最小数和最大数，因此由洛尔定理的推广推得 $F^{(n+1)}(X)$ 在区間 $\alpha<X<\beta$ 中某一点 ξ 处为零．对公式(85)求微分得出：

$$F^{(n+1)}(X)\equiv f^{(n+1)}(X)-P^{(n+1)}(X)-KA^{(n+1)}(X)\equiv f^{(n+1)}(X)-(n+1)!\,K.$$

等式 $F^{(n+1)}(\xi)=0$ 可以写为

$$f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,K=0,$$

由此把 K 换作其值(84)，便得：

$$R(x)=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{A(x)}{(n+1)!}\tag{86}$$

(哥西形的余項)[1]．

由此得出插补誤差的估計值：

$$|R(x)|\leqslant M_{n+1}(\alpha,\beta)\frac{|A(x)|}{(n+1)!},\tag{87}$$

其中已令

$$M_{n+1}(\alpha,\beta)=\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|f^{(n+1)}(x)|,$$

而 α 和 β 是 $n+2$ 个数

$$x_m\qquad(m=0,1,\cdots,n)\qquad 与\qquad x$$

中的最小数和最大数．

根据关于差分比 $\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)$ 的性質(第12节)的討論，可以略为改变哥西形的余項的推导法．首先我們来論証余項公式可以精确地写成下形：

$$R(x)=\omega(f;x,x_0,x_1,\cdots,x_n)A(x).\tag{88}$$

这可由一連串等式

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\omega(f;x,x_0),$$
$$\omega(f;x,x_0)=\omega(f;x_0,x_1)+(x-x_1)\omega(f;x,x_0,x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega(f;x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})=\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)+(x-x_n)\omega(f;x,x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

推得，这些等式不过是差分比定义的另一种写法．由这些等式可得（用第12节中的記号；故 $A_{n+1}(x)\equiv A(x)$）：

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{m=1}^{n}\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_m)A_m(x)+$$
$$+\omega(f;x,x_0,x_1,\cdots,x_n)A_{n+1}(x),\tag{89}$$

1) A. Cauchy, Oeuvres (1)5, 第 409 頁(1840).

而因为这公式的右端部分拿掉最后一項后就是插补多項式 $P(x)$[根据(56)]，所以等式(88)就被証明了.

現在討論差分比的下述性質：

$$\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{90}$$

其中 ξ 在数

$$x_m \qquad (m=0, 1, \cdots, n)$$

中的最大数与最小数之間．事实上，变数 X 的函数 $R(X) \equiv f(X) - P(X)$ 在 $n+1$ 个基点 x_m 处为零，因此根据洛尔定理的推广，$R^{(n)}(X)$ 在这些基点之間的某点 ξ 处为零．但由差分比公式(56)就得到：

$$R^{(n)}(X) = f^{(n)}(X) - P^{(n)}(X) = f^{(n)}(X) - n!\,\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_n).$$

由等式 $R^{(n)}(\xi)=0$ 就可导出公式(90).

因此，可以写出下一公式：

$$\omega(f; x, x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{90'}$$

其中 ξ 是位于 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 和 x 之間的一数．这时比較公式(88)和(90′)，我們又得到(86)，即是哥西形的余項.

給出余項估計值的公式(86)在用 s 次多項式的重基点插补时也一样有效．这可以从下述改善的洛尔推广定理得到：

“若

$$F^{(h)}(x_k)=0 \qquad \begin{pmatrix} h=0, 1, \cdots, \alpha_k-1, & \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k = n+1 \\ k=1, 2\cdots, s; & \end{pmatrix},$$

其中 $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$，則存在有点 $\xi (x_0 < \xi < x_s)$ 使 $F^{(n)}(\xi)=0$”．在这种情况下，公式(86)中的多項式 $A(x)$ 为

$$A(x) = \prod_{k=1}^{s} (x-x_k)^{\alpha_k}.$$

我們得到的插补的余項估計值(87)是依賴于被插补函数 $f(x)$ 的 n 級导数的最大模；很明显，这样的估計值仅仅在函数 $f(x)$ 的解析公式为已知时才有某种实际意义．若函数 $f(x)$ 是由試驗給出，例如是由自动仪器以曲綫的形式給出，那么显然，插补誤差的估計值必須用某种完全不同的方法导出.

例 1. 在第 11 节的例 3 中，$\lg_{10}12.7$ 的值已用綫性插补与平方插补計算出来了．在第一种情形下，

$$|R| \leqslant M_2(12, 13) \cdot \frac{|(x-12)(x-13)|}{2};$$

在第二种情况下，

$$|R|\leqslant M_3(12,14)\cdot\frac{|(x-12)(x-13)(x-14)|}{6},$$

其中 $x=12.7$. 因为对于 $f(x)=\lg_{10}x$ 有:

$$f''(x)=-\frac{\lg_{10}e}{x^2},\qquad f'''(x)=\frac{\lg_{10}e}{2x^3},$$

所以

$$M_2(12,13)=\frac{\lg_{10}e}{12^2}<\frac{1}{2\times12^2},\qquad M_3(12,14)=\frac{\lg_{10}e}{2\times12^3}<\frac{1}{2\times2\times12^3},$$

因而当用綫性插补时誤差不超过 0.00347, 而用平方插补时誤差不超过 0.000014.

例 2. 試按照哥西公式估計第 12 节例 2 的插补誤差.

这誤差可用不等式

$$|R|<M_3(25,49)\times\frac{16\times5\times8}{6}$$

表出, 因为对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 有:

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},\qquad M_3(25,49)=\frac{3}{8}\times25^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{5^5},$$

所以

$$|R|<\frac{8}{5^4}=0.0128.$$

例 3. 若在基点 $x_0=1000=10^3$, $x_1=1331=11^3$, 和 $x_2=1728=12^3$ 間插补函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 时, 把 1300 开立方能有怎样的精确度?

我們有:

$$|R|\leqslant M_3(1000,1728)\times\frac{300\times31\times428}{6},$$

又因为

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}},\qquad M_3(1000,1728)=\frac{10}{27}\cdot1000^{-\frac{8}{3}}=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{10^7},$$

所以得到

$$|R|<0.0025.$$

例 4. 把 $\sin0^\circ$, $\sin15^\circ$, $\sin30^\circ$ 和 $\sin45^\circ$ 的値算作已知, 用插补法計算 $\sin5^\circ$ 和 $\sin25^\circ$ 时, 能有怎样的精确度? 在这些条件下, 計算从 0° 到 45° 之区間中的任何角的正弦能有怎样的精确度?

令 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$, 并在基点 $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ 和 $x_3=1$ 間用三次多項式来插补. 可用不等式

$$|R|\leqslant M_4(0,1)\times\frac{\left|x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right|}{24}$$

来估計誤差．因为

$$M_4(0,1)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\sin\frac{\pi}{4}x=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0.269\cdots,$$

所以由此得到

$$|R|<0.0112\times\left|x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right|.$$

为了得到 $\sin 5^\circ$，应令 $x=\frac{1}{9}$．那么就有：

$$|R|<0.0112\times\frac{80}{6561}=0.000136.$$

同样，为了得到 $\sin 25^\circ$，須令 $x=\frac{5}{9}$，于是

$$|R|<0.0112\times\frac{40}{6561}=0.000068.$$

在区間 $(0,1)$ 中，多項式 $x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$ 的絕对值不超过 $\frac{1}{81}$，因此，对于任何不超过 45° 的角，按照我們的插补公式計算正弦时，其誤差可由下面的公式給出：

$$|R|<0.0112\times\frac{1}{81}=0.000138.$$

例 5. 試估計第 11 节例 5 中綫性插补的誤差．这时

$$|R|<M_2(1.23,1.24)\times\frac{0.007\times0.003}{2}.$$

因为

$$\Phi''(x)=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2},$$

所以

$$M_2(1.23,1.24)<0.7,$$

結果有

$$|R|<0.000008$$

（若不从 4 位数字表，而从 8 位数字表中取出已知数据，那么就可以保証这个精确度）．

例 6. 試估計第 11 节例 6 中二次插补的誤差．

在这一次

$$|R|<M_3(2.1,2.2)\times\frac{0.075\times0.025\times0.125}{6}.$$

但

$$|\mathrm{Si}'''x|=\left|-\frac{\sin x}{x}-\frac{2\cos x}{x^2}+\frac{2\sin x}{x^3}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{2}{|x^2|}+\frac{2}{|x^3|},$$

所以

$$M_3<\frac{5}{4}$$

而

$$|R|<0.00005.$$

例 7. 在第 11 节例 7 中,試估計用三次多項式插补时的誤差.

$$|R|<M_4(9.5,11)\times\frac{0.7\times0.2\times0.3\times0.8}{24}.$$

因为

$$|S^{(4)}(x)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|-x^{-\frac{1}{2}}\cos x+\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}\sin x+\frac{9}{4}x^{-\frac{5}{2}}\cos x-\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}\sin x\right|<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{9}{4x^2}+\frac{15}{8x^3}\right)<\frac{1}{5},$$

所以

$$|R|<\frac{1}{5}\times\frac{0.0336}{24}<0.0003.$$

当变数取在插补区間(α,β)中的每一确定值时,公式(87)給出插补誤差的范圍。若需要指出对于这区間內的任何值的誤差的一致范圍,那么显然需改作下一公式:

$$|R(x)|\leqslant M_{n+1}(\alpha,\beta)\frac{1}{(n+1)!}\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|A(x)|. \tag{91}$$

联系于这一公式,我們提出一个問題:若由我們自己选擇插补基点,那么它們应如何分布在区間(α,β)中,才使得不等式(91)的右端能給出插补誤差的最小范圍?很奇怪,基点决不应取成等距离的,而应聚集在区間的两端。事实上,为了确定起見,假設插补区間是$(-1,+1)$,利用契比謝夫多項式的基本極值性質(第 14 节),我們看到,需要令

$$A(x)=\dot{T}_{n+1}(x)$$

以便使因子$\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|A(x)|$能尽量地小,即基点应取作契比謝夫多項式的零点。在这情况下,誤差的一致估計由下一不等式給出:

$$|R(x)|\leqslant M_{n+1}(-1,+1)\times\frac{1}{(n+1)!}\times\frac{1}{2^n}.$$

16. 無穷插补过程及其收斂性 若用插补公式近似計算函数值并用余項来估計誤差的范圍,这显然是某一数学結果。但在所得到的誤差范圍太大,因而計算的精确度太小的情况下,这一結果就不能十分令人滿意。若我們認为精确度不够时,則自然地企圖改变插补公式,以改善精确度,即:增加插补点的个数,同时提高插补多項式的次数。非常重要的是要解决:能不能用这个办法使誤差范圍任意地小?換句話說,能不能用插补法計算函数值使达到任何精确程度?現在我們必需研究这个問題。

設想对已知函数 $f(x)$ 作了整整一系列——無穷序列——插补法,称它們为

$$(I_1), (I_2), (I_3), \cdots, (I_n)\cdots.$$

設把插补法中的基点記作

$$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)},$$

而所得插补多項式是 $P_n(f; x)$. 由这些数据所确定的插补序列称为插补过程. 若关系式

$$\lim_{n\to\infty} P_n(f; x) = f(x) \tag{92}$$

成立，或者换句話說，若級数

$$P_0(f; x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(f; x) - P_{n-1}(f; x)] \tag{93}$$

对于給出的值 x 收斂于函数 $f(x)$，那么这个过程被認为在点 x 处收斂. 若对于区間中的所有 x 值，極限关系式(92)一致成立，或者即級数(93)在这区間上一致收斂，则这过程在已知区間上一致收斂；这就是說，对不論怎样小的数 $\varepsilon(>0)$，总可指出这样的 n_ε，使当 $n>n_\varepsilon$ 时，对于区間上所有的值 x，不等式

$$|P_n(f; x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立.

若插补过程是收斂的，那么可以用插补法来計算函数值到任何精确度.

特別注意这种情况，即插补法 (I_n) 的基点正好是預先給定的序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$$

中的前 $n+1$ 个点，而插补法 (I_{n+1}) 的基点是在前 $n+1$ 个点上再加一个新点 x_{n+1}. 这时

$$x_n^{(m)} = x_n,$$

亦即数 $x_n^{(m)}$ 与上标無关. 若插补过程同时还是(在第 14 节所确定的意义下)正交的，那么多項式 $P_n(f; x)$ 就是級数

$$V_0(f)L_0(x) + V_1(f)L_1(x) + \cdots + V_n(f)L_n(x) + \cdots$$

的前 $n+1$ 項的部分和，其中泛函数 $V_n(f)$ 和多項式 $L_n(x)$ 是用正交关系式

$$V_i(L_k) = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq k \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } i = k \text{ 时} \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \cdots)$$

联系着的.

关于插补过程的收斂性，当然应該由插补的余項来判断. 如我們所知，插补法 (I_n) 的余項可以写出为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A_{n+1}(x),$$

其中已令：

$$A_{n+1}(x)=\prod_{m=0}^{n}(x-x_m^{(n)});$$

点 ξ 应該位于数 $x_m^{(n)}(m=0,1,2,\cdots,n)$ 与 x 中的最大数与最小数之間。

因此，等式

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \tag{94}$$

是过程收斂的条件。

关于插补过程收斂性的某些一般情形将在第 59 节中講述。这里我們只討論若干特例。

例 1. 試討論牛頓公式(第 11 节)

$$P_n(f;x)=\sum_{m=0}^{n}\Delta_n f(a)\cdot\Phi_n(x-a;h)\quad(h>0)$$

的收斂性，特別是当 $f(x)=\sin kx$ 和 $f(x)=e^{kx}(k>0)$ 的时候。

由余項估計值可得(在 $a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的假定下)：

$$|R_n(x)|\leqslant M_{n+1}h^{n+1}\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|\Phi_{n+1}(x-a;h)|,$$

其中 M_{n+1} 表示 $f^{(n)}(x)$ 在一个区間上的最大模，这个区間包含在数 α,β 和 $a+nh$ 中的最大数和最小数之間。

研究阶乘多項式：

$$\Phi_n(x-a;h)=\frac{1}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h).$$

显然，令 $\beta+|a|=\gamma$ 就会有

$$\lg\prod_{m=0}^{n-1}|x-a-mh|\leqslant\sum_{m=0}^{n-1}\lg(\gamma+mh)<\int_0^n\lg(\gamma+mh)dm=$$

$$=\frac{1}{h}[(\gamma+mh)\lg(\gamma+mh)-(\gamma+mh)]\Big|_0^n=n(\lg n-1+\lg h+\varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，同样

$$\lg(n!)=\sum_{m=1}^{n}\lg m>\int_1^n\lg m\,dm=n(\lg n-1+\varepsilon_n'),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n'=0$，因此

$$h^n\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|\Phi_n(x-a;h)|<(he^{\varepsilon_n''})^n\qquad(\text{其中}\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n''=0). \tag{95}$$

假設

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lg M_n}{n}=g. \tag{96}$$

于是为了要插补过程收敛只需有不等式

$$g+\lg h<0 \tag{97}$$

就够了．实际上，由(96)得到，不論 $\varepsilon>0$ 怎样小，对于充分大的 n，总有 $M_n<e^{n(g+\varepsilon)}$，于是連同(95)就推得

$$M_n\ h^n\max_{\alpha\leq x\leq\beta}|\Phi_n(x-a;h)|<e^{n(g+\lg h+\varepsilon+\varepsilon_n'')},$$

因而不等式(97)就保証了我們的論断．

若令 $f(x)=\sin kx$，那么在任一区間上，任意級导数 $f^{(n)}(x)$ 的絕对值不超过 k^n，因此可以令 $M_n=k^n$；这时 $g=\lg k$，而我們得到在任一有限区間上一致收斂的充分条件：

$$k<\frac{1}{h}.$$

若令 $f(x)=e^{kx}$，那么必須取 $f^{(n)}(x)=k^ne^{kx}$ 在点 $x=a+nh$ 处的值作为 M_n，那么 $M_n=k^ne^{k(a+nh)}$，因此 $g=\lg k+hk$，而收斂的充分条件是：

$$k<\frac{\omega}{h},$$

其中 ω 是方程 $\omega e^{\omega}=1$ 的根($\omega\approx0.567$)．

例 2. 設在区間$(-1,+1)$中取等距离的基点

$$x_n^{(m)}=-1+\frac{2m}{n}\qquad(m=0,1,\cdots,n).$$

試研究插补过程在这个区間上的收斂性，特别是应用到函数 $f(x)=\frac{1}{a^2-x^2}$ $(a>1)$ 上．

在这一情况下，

$$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{m=0}^{n}\left(x+1-\frac{2m}{n}\right)\right|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}2^{n+1}\left|\prod_{m=0}^{n}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{m}{n}\right)\right|, \tag{98}$$

而且 $M_n=\max\limits_{-1\leq x\leq1}|f^{(n)}(x)|$．

令 $\frac{x+1}{2}=X$；于是(98)式右端的乘积成为

$$\left|\prod_{m=0}^{n}\left(X-\frac{m}{n}\right)\right|.$$

若丢掉小于 $\delta(0<\delta<1)$ 的因子，我們只会把它增大

$$\left|\prod_{m=0}^{n}\left(X-\frac{m}{n}\right)\right|\leq\prod_{\substack{1\leq m\leq n\\ \left|\frac{m}{n}-X\right|>\delta}}\left|\frac{m}{n}-X\right|.$$

进一步得到

$$\lg \prod_{\substack{0\leq m\leq n \\ \left|\frac{m}{n}-X\right|>\delta}} \left|\frac{m}{n}-X\right| = \sum_{\frac{m}{n}<X-\delta} \lg\left|\frac{m}{n}-X\right| + \sum_{\frac{m}{n}>X+\delta} \lg\left|\frac{m}{n}-X\right|.$$

由上面这些式子(假定 $X\neq\frac{m}{n}$)可得

$$\lg\sqrt[n]{\left|\prod_{m=0}^{n}\left(X-\frac{m}{n}\right)\right|}\leq\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}<X-\delta}\lg\left|\frac{m}{n}-X\right|+\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}>X+\delta}\lg\left|\frac{m}{n}-X\right|,$$

因此(取当 $n\to\infty$ 时的極限)

$$\varlimsup_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{\left|\prod_{m=0}^{n}\left(X-\frac{m}{n}\right)\right|}\leq\int_0^{X-\delta}\lg|\xi-X|\,d\xi+\int_{X+\delta}^{1}\lg|\xi-X|\,d\xi.$$

这里 δ 任意小；因为积分$\int_0^1\lg|\xi-X|\,d\xi$是收斂的，故命 δ 趋于零，就得到：

$$\varlimsup_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{\left|\prod_{m=0}^{n}\left(X-\frac{m}{n}\right)\right|}\leq\int_0^1\lg|\xi-X|\,d\xi=X\lg X+(1-X)\lg(1-X)-1,$$

或者还原到变数 x,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{\left|\prod_{m=0}^{n}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{m}{n}\right)\right|}\leq\frac{1+x}{2}\lg\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\lg\frac{1-x}{2}-1=u(x)-\lg 2,$$

其中已令

$$u(x)=\frac{1}{2}[(1+x)\lg(1+x)+(1-x)\lg(1-x)]-1.$$

由此得到：

$$\left|\prod_{m=0}^{n}\left(x+1-\frac{2m}{n}\right)\right|\leq 2e^{n[u(x)+\varepsilon_n]}\qquad(\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0).\tag{99}$$

若設

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}=K,\tag{100}$$

那么就有

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\leq e^{n(\lg K+\varepsilon)},\tag{101}$$

而从不等式(98)，(99)和(101)就推得在条件

$$u(x)+\lg K<0\tag{102}$$

下，插补过程收斂.

現在來更詳細地研究函数 $u(x)$. 它是一个偶函数:

$$u(-x)=u(x),$$

又因为当 $0<x<1$ 时，它的导数

$$u'(x)=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

是正的，所以 $u(x)$ 在区間 $(0,1)$ 中遞增. $u(x)$ 的最大值在基本区間的端点处达到:

$$u(-1)=u(1)=-1+\lg 2=-0.30\cdots,$$

而在中点处达到最小值(圖 9):

$$u(0)=-1.$$

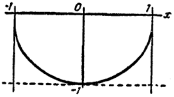


圖 9

回到不等式(102)，我們看到，若 $K<\frac{1}{2}e=1.359\cdots$，那么在整个区間上保証了收斂性；若 $\frac{1}{2}e<K<e$，那么仅在区間中由不等式 (102) 所确定的那一部分上保証了收斂性；最后，若 $K>e$，那么在区間 $(-1,+1)$ 上收斂性毫無保証. 对于函数 $f(x)=\sin kx$ 和 $f(x)=e^{kx}$，我們得到 $K=0$，因此收斂性成立. 例如，如果令

$$f(x)=\frac{1}{a^2-x^2} \qquad (a>1),$$

那么从

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(a-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}}\right]$$

得到

$$K=\frac{1}{a-1}.$$

仅仅当 $a>1+\frac{2}{e}$ 时，上面的討論保証了在整个区間上的收斂性，而当 $a>1+\frac{1}{e}$ 时，只能保証在其一部分上的收斂性.

例 3. 若以契比謝夫多項式的零点

$$x_m^{(n)}=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

作为基点时，試研究在区間 $(-1,+1)$ 中插补过程的收斂性. 我們曾經看見 (第 15 节末)，在所述情况下，可用不等式

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{1}{2^n}$$

来估計余項. 所以在这一次，条件

$$K<2$$

的成立就已保証了在整个区間上[1]插补法的一致收斂性.

17. 發散的插补过程的例子 我們曾遇見过一种值得注意的情况，它似乎是出乎意料之外的：即使插补多項式的次数無限增加，插补基点到处稠密的分布，我們仍不

1) 在研究余項的哥西的积分形式时(参看第 59 节)，可得更便利的收斂的充分条件.

能推出在所討論的区間上，多項式与我們所插补的連續函数之間的偏差会任意地小。应該指出，以前所指出的插补过程的收斂条件都是充分条件而决不是必要条件；由此自然产生一种想法：会不会过程总是收斂的，但用我們的估計誤差的方法不是永远能判断出收斂性？下面的例子将指出，不論用怎样的方法估計誤差，插补过程倘乎在某些情况下是發散的。

例 1. 泰乐級数的部分和就是最簡单的例子，这級数是作为插补多項式的一个特殊情况而包括在一般理論中．十分明白，冪級数在以到最近的奇异点的距离为半徑的圓內收斂，在这个圓外發散．因此例如函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 虽在整个实軸上是正則的，然而在以 $x=0$ 为中心的邻域內所对应的泰乐級数当 $|x|>1$ 时是發散的．

实在說来，上述的例子是关系于外推法的情况．下面我們引进更重要得多的例子（正是有关于在确切意义下的插补法），在这例子中，所考虑的函数在整个插补区間上是連續的，而插补过程一点也不像我們在第 16 节中所見到过的那样一致收斂．也就是如果在各基点处插补多項式的值与函数的对应值自然地相等，那么在各基点間的区間上，多項式值与函数值的差的絕对值随着多項式次数的增加而無限增加．

下面的例子是 C. H. 伯恩斯坦的[1]举出的．

例 2. 考察函数

$$f(x)=|x| \qquad (-1\leqslant x\leqslant +1).$$

利用第 11 节牛頓公式(48)，在其中令 $a=-1$，$h=\frac{1}{n}$，并注意在这些条件下，

$$|a|=1, \qquad \Delta|a|=-\frac{1}{n}, \qquad \Delta_2|a|=\cdots=\Delta_n|a|=0.$$

至于差分 $\Delta_{n+m}|a|\ (m=1,2,\cdots,n)$，那么为了計算它們，我們注意

$$|x|=-x+2\lambda(x),$$

其中已令

$$\lambda(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此

$$\Delta_{n+m}|x|=-\Delta_{n+m}x+2\Delta_{n+m}\lambda(x)=2\Delta_{n+m}\lambda(x).$$

根据第 10 节公式(30)計算 $\Delta_{n+m}\lambda(x)$，我們得到：

$$\Delta_{n+m}\lambda(x)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_{n+m}^{n+i}\frac{i}{n}=(-1)^{m-1}\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!\,n!}{}^{1)},$$

所以

$$\Delta_{n+m}|a|=(-1)^{m-1}2\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!\,n!} \qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

1) 此式由第 10 节例 5 的公式中化出，只要在公式中令 $p=2$，并将 n 换为 $m-1$，将 x 换为 $n+m$。

因而由第 11 节公式(48)可得：

$$P_{2n}(x)=-x+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}n^{n+m}}{(n+m)(n+m-1)n!(m-1)!}(x+1)\cdots\left(x+\frac{1}{n}\right)x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{m-1}{n}\right). \quad (103)$$

假定 x 是負数1)，并且是两基点之間的区間的平分点：

$$x=-\frac{\lambda}{n}-\frac{1}{2n} \qquad (\lambda>0 \text{ 是整数}).$$

于是公式(103)中右端和数中的一切項有同一符号，而且最后一項的絕对値等于

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(n-\lambda-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)}{2(2n-1)(n!)^2}.$$

这一表达式大于

$$\frac{1}{16n}\frac{(n-\lambda-1)!\,(n+\lambda-1)!}{(n!)^2}=\frac{1}{16n^3(n^2-\lambda^2)}\frac{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}{[(n-1)!]^2}>$$

$$>\frac{1}{16n^3(n^2-\lambda^2)}\frac{(n-\lambda)^{n-\lambda}(n+\lambda)^{n+\lambda}\,{}^{2)}}{n^{2n}}. \quad (104)$$

設 $x<-\delta$，其中 δ 是任意小的、然而是固定的正数，則当 n 充分大时，$\frac{\lambda}{n}>\frac{\delta}{2}$. 因为在这一条件下(依第 16 节例 2 中的記号)，

$$\lg\sqrt[n]{\frac{(n-\lambda)^{n-\lambda}(n+\lambda)^{n+\lambda}}{n^{2n}}}=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\lg\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)+\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\lg\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)=$$

$$=2\left[u\left(\frac{\lambda}{n}\right)+1\right]>2\left[u\left(\frac{\delta}{2}\right)+1\right]>0,$$

那么在不等式(104)中最后的分式隨着 n 增加而比某一發散几何級数更快地增加，因而 $P_{2n}(x)$ 在两基点之間的区間的平分点处，其絕对値無限增加，而不趨于 $|x|$.

因此，若注意到在我們的例子中，插补基点所成的系与次数 n 有关，而且不論基点本身也好，基点之間的区間的中点也好，是会分布得处处稠密的，所以可以正确地作出結論：在所給情况中，**插补法是完全發散的过程**3).

18. 用各級导数的插补法4) 現在来討論下述問題，它既非迄今所考察过的插补法的特別情况，又非其推广，它引出了一种特殊形式的插补过程.

1) 对于正的 x 值，这些同样的結論可从被插补函数与插补过程的对称性推得.

2) 由不等式

$$\int_1^n \lg x\,dx<\sum_{1}^{n}\lg m<\int_1^{n+1}\lg x\,dx, \qquad \left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

得出.

3) 在 И. П. Натансон 的書[1]中指出(第 519—525 頁)，在这个例子中，插补法在区間中除去 $x=0$ 外任一固定点处發散，而它在 $x=0$ 处收斂.

4) В. Л. Гончаров [1]，[2].

求作一 n 次多項式 $P(x)$ 滿足下列条件：

$$P^{(m)}(x_m)=y^{(m)} \qquad (m=0,1,\cdots,n), \tag{105}$$

其中 x_m 和 $y^{(m)}$ 是任意的数。

若用待定系数法来求提出的問題的解，那么令 $P(x)=\sum_{m=0}^{n}c_m x^m$ 时，不难証明，由条件(105)所产生的方程組有不等于零的行列式，所以問題的解答永远存在，而且只有一个；它可由公式

$$P(x)=\frac{-1}{1!\,2!\cdots n!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2\cdots x^n \\ y^{(0)} & 1 & x_0 & x_0^2\cdots x_0^n \\ y^{(1)} & 1 & x_1 & x_1^2\cdots x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)} & 0 & 0 & 0\cdots n! \end{vmatrix}$$

得出。

但是对于多項式 $P(x)$ 可以得到另一較方便的表达式。即是，注意到条件(105)中最后一个

$$P^{(n)}(x)=y^{(n)}$$

是恒等式，把它从 x_{n-1} 到 x 积分，同样考虑到条件(105)中的倒数第二个(对于 $m=n-1$)；于是我們有(积分变数記作 $x^{(n)}$)：

$$P^{(n-1)}(x)=y^{(n-1)}+y^{(n)}\int_{x_{n-1}}^{x}dx^{(n)}.$$

再对它积分，但这次从 x_{n-2} 到 x 取积分，注意到(105)中对应于值 $m=n-2$ 的条件，并用字母 $x^{(n-1)}$ 来表示新的积分变数：

$$P^{(n-2)}(x)=y^{(n-2)}+y^{(n-1)}\int_{x_{n-2}}^{x}dx^{(n-1)}+y^{(n)}\int_{x_{n-2}}^{x}dx^{(n-1)}\int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}}dx^{(n)}.$$

这样繼續下去，經 n 次积分并注意到(105)中的所有条件，便得：

$$P(x)=y^{(0)}+y^{(1)}\int_{x_0}^{x}dx'+y^{(2)}\int_{x_0}^{x}dx'\int_{x_1}^{x'}dx''+\cdots+ \\ +y^{(n)}\int_{x_0}^{x}dx'\int_{x_1}^{x'}dx''\cdots\int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}}dx^{(n)}. \tag{106}$$

这就是所求的多項式。引进記号

$$L_0(x)\equiv 1, \quad L_m(x)=\int_{x_0}^{x}dx'\int_{x_1}^{x'}dx''\cdots\int_{x_{m-1}}^{x^{(m-1)}}dx^{(m)} \quad (m=1,2,\cdots,n), \tag{107}$$

可以把它改写成：

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n} y^{(m)} L_m(x). \tag{108}$$

现在轉到正常意义下的插补法，我們提出求 n 次多項式 $P(f; x)$ 的問題，要它滿足條件

$$P^{(m)}(x_m)=f^{(m)}(x_m) \qquad (m=0, 1, \cdots, n). \tag{109}$$

显然，这个多項式的形状是

$$P(f; x)=\sum_{m=0}^{n} f^{(m)}(x_m) L_m(x). \tag{110}$$

注意，由第 14 节中所叙述的理論的观点，泛函数

$$V_m(f)=f^{(m)}(x_m)$$

与多項式 $L_m(x)$ 构成正交系：

$$V_i(L_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k \text{ 时,}\\ 1, & \text{当 } i=k \text{ 时,}\end{cases}$$

这就决定了多項式 $L_m(x)$ 与 n 無关. 在这关系下，按公式(110)用逐次导数的插补法与按差分比公式的插补法相类似.

例 1. 作一三次多項式 $P(x)$ 满足条件

$$P(0)=0, \quad P'(1)=0, \quad P''(-1)=0, \quad P'''(0)=6.$$

答： $$P(x)=6\int_0^x dx'\int_1^{x'} dx''\int_{-1}^{x''} dx'''=x^3+3x^2-9x.$$

例 2. 作特殊的假設 $x_0=x_1=\cdots=x_n=a$ 就可导出多項式

$$L_m(x)=\frac{(x-a)^m}{m!},$$

而 $P(f; x)$ 变成泰乐級数的部分和：

$$P(f; x)=\sum_{m=0}^{n} f^{(m)}(a)\,\frac{(x-a)^m}{m!}.$$

例 3. 設点 x_m 形成一算术級数：

$$x_m=a+mh \qquad (h\neq 0; \quad m=0, 1, \cdots, n).$$

在这种情况下，用完全归納法可証明，多項式 $L_m(x)$ 成为

$$L_m(x)=\frac{1}{m!}(x-a)(x-a-mh)^{m-1}.$$

这些多項式是由阿倍尔引进的[1]).

例 4. 若点 x_m 用公式

$$x_m=(-1)^m$$

1) N. H. Abel, Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes (Oeuvers, 卷 2).

給出，那么多項式

$$L_m(x)=\frac{1}{m!}4^m E_m\left(\frac{1\pm x}{4}\right)$$

(当 m 为奇数时取"+"号，当 m 为偶数时取"−"号)与由

$$\frac{1}{2}[E_m(x)+E_m(1+x)]=x^m \qquad (m=0,1,\cdots)$$

所确定的尤拉多项式相关.

不难写出余項 $R_n(x)=f(x)-P_n(f;x)$. 即可把它写成下列形状:

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x}dx'\int_{x_1}^{x'}dx''\cdots\int_{x_n}^{x^{(n)}}f^{(n+1)}(x^{(n+1)})dx^{(n+1)}, \tag{111}$$

因此就得到下一恒等式:

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x_k)\int_{x_0}^{x}dx'\int_{x_1}^{x'}dx''\cdots\int_{x_{k-1}}^{x^{(k-1)}}dx^{(k)}+R_n(x). \tag{112}$$

它的正确性是由于: 1)把它微分 m 次并代入 $x=x_k$, 在(112)的两端給出了同样的結果($m=0,1,\cdots,n$); 2)把它微分($n+1$)次时就得到恒等式.

19. 广义多項式的插补法 为了把原則方面的問題弄清楚起見，我們还要做进一步的推广.

設把插补問題比导言(第1节)中的提法更广泛地提出如下: 設借以进行插补法的函数类是用公式

$$P(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x) \tag{113}$$

給出的，其中 a_i 是待定系数，而函数 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是預先給出的連續函数(如我們总是假定的一样)，但已經不是变数 x 的逐次冪，而是某些别的函数. 我們規定把形如(113)的表达式称为广义多項式.

对函数系 $\varphi_k(x)$，假設它在基本区間 (a,b) 上綫性無关. 这就是說，从恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)=0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{114}$$

便得 $\lambda_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，这就是說不可能选擇出常数組 λ_i，使得恒等式(114)成立，而且 λ_i 不全等于零. 我們熟知的最簡单的綫性無关函数系的例子是(对于任何区間)各次冪

$$1,x,x^2,\cdots,x^n \tag{α}$$

或者三角函数

$$1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx, \tag{β}$$

$$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx. \qquad (\beta')$$

所有由綫性無关系中的函数所組成的子系显然也是綫性無关的。函数系 $\varphi_k(x)$ 綫性無关的必要与充分条件是：当变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取遍基本区間中一切可能的值时，行列式

$$D \equiv D(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1)\ \varphi_2(x_1) \cdots \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2)\ \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_n(x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1(x_n)\varphi_2(x_n) \cdots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \qquad (115)$$

不应該恒等于零。事实上，設所考察的函数系不是綫性無关。于是，可以找出不全等于零的常数 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，使恒等式(114)成立。設 x_k' $(k=1,2,\cdots,n)$ 是我們的区間上的某些点；我們有：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_k) = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

又因为 λ_i 不全等于零，由此得到 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$。逆定理可用归納法証明。从 $n=1$ 开始。設由一个函数 $\varphi_1(x)$ 組成的系綫性無关。这就意味着 $\varphi_1(x)$ 不恒等于零。但因为在这种情况下 $D(x_1) \equiv \varphi(x_1)$，所以这对 $D(x_1)$ 也正确。再設从 $n-1$ 个函数所成的系綫性無关可推得对应的行列式不恒等于零，現在来証明对 n 个函数所成的系也同样如此。

設 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$。但是 $D(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \not\equiv 0$；否則，按照我們的假設，函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 就不是綫性無关的，因此，所給出的函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 也不是綫性無关的。

設 $x_i = x_i^0$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是变数的这样一些值，使得 $D(x_0^0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) \neq 0$。那么把行列式 $D(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{n-1}^0, x)$ 按最后一行展开（在其中写出 x 代替 x_n），我們就得到形如 (114) 的恒等式，在这恒等式中 λ_i 不全等于零，因为 $\lambda_n = D(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{n-1}^0) \neq 0$。而这就是說函数系 $\varphi_k(x)$ 不是綫性無关的。

假定未知函数 $P(x)$ 受条件

$$P(x_i) = y_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (116)$$

的限制，其中 y_i 是已知数，而 x_i 也是已知数，自然 x_i 彼此不同。能否求出函数 $P(x)$，亦即能否对于系数 a_i 解出方程組 (116) 要看行列式 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是否异于零而定。

在解决由等式 (116) 确定其性質的插补問題时，从函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是綫性無关的假設出發是完全自然的。然而为了使插补問題有唯一的解，这个假設

还不充分。将方程(116)看作 n 个未知数 a_i 的方程組时，我們看到，插补問題的解的存在与唯一在行列式(115)当数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相等时总异于零这一要求之下才有保障。

若函数系 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 具有这样的性質，由它們所构成的行列式 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 只是在等式 $x_i = x_k$ $(i \neq k)$ 有一个成立时才等于零，这样的系就称为契比謝夫系[1)]。这样：

为了使得对于已知区間中的任意基点組，寻找滿足条件(116)的"广义多項式" $P(x)$ 的插补問題有唯一解的必要与充分条件是函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 在所考察的区間上是契比謝夫系。

由第7节中进行的計算可見函数系 (α), (β), (β') 和 (β, β') 都是契比謝夫系[2)]。

注意，由契比謝夫系中的函数所构成的子系不一定总是契比謝夫系。譬如，系 $1, x, x^2$ 是契比謝夫系，但关于系 $1, x^2$ 就不能这样說，因为对于它行列式

$$D \equiv x_2^2 - x_1^2$$

不只在 $x_1 = x_2$ 时为零。

不难这样来重新表述所給函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是契比謝夫系的条件，使得它不依賴于行列式的概念。这条件就是：任一不恒等于零的广义多項式 $P(x)$ 在基本区間上等于零的点的个数必少于 n。

实际上，若用公式(113)所确定的广义多項式 $P(x)$ 在基本区間中 n 个不同的点处例如在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处为零，那么由等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_k) = 0$$

我們就会得出結論：尽管所有各点 x_i 不同，行列式 $D(x_1, \cdots, x_n)$ 却等于零，这就与契比謝夫系的基本性質相違背。反过来，若系 $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 不是契比謝夫系，则对在基本区間上彼此不相同的点 x_i^0 $(i=1, 2, \cdots, n)$，有 $D(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) = 0$；于是广义多項式

$$P(x) \equiv D(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{n-1}^0, x)$$

在 n 个不同的点 x_i^0 $(i=1, 2, \cdots, n)$ 处就会为零。

20. 綫性泛函数的近似表写．机械求积法　既然插补公式能或多或少有效地表写所給出的函数，所以也可以利用这些公式来近似計算这函数的各种綫性泛函数。

1) С.Н. Бернштейн [2]，第7頁。

2) 在三角函数系的情形下，自然取周期区間作为基本区間。

事实上，只要运用給出的綫性泛函数到插补多項式上去就行了．然而值得極細心地研究这时所發生的誤差的估計問題．

我們以后特别注意的綫性泛函数 $F(f)$ 屬于下列两种类型：

1）形如

$$F(f)=\int_a^b f(x)p(x)dx \tag{117}$$

的积分，其中 $p(x)$ 是任意的非負已知函数，

2）和数

$$F(f)=\sum_{m=1}^{N} p_m f(\xi_m),$$

其中 ξ_m 与 p_m (>0) 是任意的数．为了統一积分与和数两种情况，我們将考察斯提叶斯积分

$$F(f)=\int_a^b f(x)\,d\psi(x), \tag{118}$$

其中 $\psi(x)$ 是任意的不減函数．实用上特别重要的是普通积分的情况

$$F(f)=\int_a^b f(x)dx. \tag{118'}$$

近似計算积分(118′)或者更一般形如(117)的积分的方法也常称为机械求积法．

設 $f(x)$ 是被插补的函数，$P(x)$ 是插补多項式，$R(x)$ 是余項，$F(f)$ 是已知的綫性泛函数．于是从恒等式

$$f(x)=P(x)+R(x)$$

按綫性泛函数的基本性質导出恒等式

$$F(f)=F(P)+F(R);$$

若我們把 $F(P)$ 算作 $F(f)$ 的近似值，那么 $F(R)$ 就不是别的，而恰好是計算的誤差．

一般令

$$I=\int_a^b f(x)d\psi(x).$$

从拉格朗智插补公式

$$P_n(f;x)=\sum_{m=0}^{n} f(x_m)L_m(x),$$

其中

$$L_m(x)=\frac{A(x)}{(x-x_m)A'(x_m)},$$

推得

$$F(P)=\int_a^b P(f;x)d\psi(x)=\sum_{m=0}^{n}A^{(m)}f(x_m),\tag{119}$$

而 $A^{(m)}$ 是不依賴于 $f(x)$ 的数字系数:

$$A^{(m)}=\int_a^b L_m(x)\,d\psi(x)=\int_a^b \frac{A(x)}{(x-x_m)A'(x_m)}d\psi(x).\tag{120}$$

这些系数也可用下面的条件唯一地确定(而与插补公式無关),即要求等式

$$\int_a^b P(x)d\psi(x)=\sum_{m=0}^{n} A^{(m)}f(x_m)$$

对于次数不超过 n 的任意多项式 $P(x)$ 必須成立,特别对于 $P(x)=x^k$ 也要成立:

$$\int_a^b x^k d\psi(x)=\sum_{m=0}^{n}A^{(m)}x_m^k \qquad (k=0,1,\cdots,n);\tag{121}$$

由此得到系数 $A^{(m)}$ 的与房德蒙行列式有关的表达式:

$$A^{(m)}=\begin{vmatrix}1 & 1\cdots 1 & \int_a^b d\psi(x) & 1 & \cdots 1\\ x_0 & x_1\cdots x_{m-1} & \int_a^b x d\psi(x) & x_{m+1} & \cdots x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^n & x_1^n\cdots x_{m-1}^n & \int_a^b x^n d\psi(x) & x_{m+1}^n & \cdots x_n^n\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 1\cdots 1\\ x_0 & x_1\cdots x_n\\ \cdots & \cdots\\ x_0^n & x_1^n\cdots x_n^n\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\int_a^b W(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x,x_{m+1},\cdots,x_n)d\psi(x)}{W(x_0,\cdots,x_{m-1},x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)} \qquad (0\leqslant m\leqslant n).$$

至于余項,那么从哥西形的公式

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}A(x), \qquad A(x)=\prod_{m=0}^{n}(x-x_m)$$

出發(其中 ξ 包含在数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 与 x 中最大数与最小数之間),在积分(118)的情况下,就可以写出

$$F(R)=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)A(x)d\psi(x),\tag{122}$$

于是在通常的記号下,我們得到:

$$|F(R)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |A(x)|d\psi(x)\tag{123}$$

(这里 M_{n+1} 应該了解为导数 $f^{(n+1)}(x)$ 在数 $a,b,x_0,x_1,\cdots,x_n$ 中最大数与最小数所构成的区間中的最大模)。

我們来討論某些特殊情况。

例 1. 写出計算积分

$$I=\int_0^1 f(x)dx$$

的近似公式，并把插补点取为等距离的：

$$x_m^{(n)}=\frac{m}{n}\qquad (m=0,1,\cdots,n).$$

这公式形如

$$I_n=\sum_{m=0}^{n} a_m^{(n)} f\left(\frac{m}{n}\right). \tag{124}$$

系数 $a_m^{(n)}$ 称为哥特斯系数[1]，而可用下列公式确定，

$$a_m^{(n)}=\int_0^1 \frac{A_n(x)}{\left(x-\frac{m}{n}\right)A'_n\left(\frac{m}{n}\right)}dx, \tag{125}$$

$$A_n(x)=x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots(x-1)\qquad (m=0,1,\cdots,n).$$

令 $n=1$，于是

$$A_1(x)=x(x-1),\qquad A'_1(x)=2x-1,$$

所以

$$a_0^{(1)}=\int_0^1 \frac{x-1}{-1}\,dx=\frac{1}{2},\qquad a_1^{(1)}=\int_0^1 \frac{x}{1}\,dx=\frac{1}{2},$$

因而

$$I_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]. \tag{126}$$

現在令 $n=2$，于是

$$A_2(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1),\qquad A'_2(x)=3x^2-3x+\frac{1}{2},$$

进而

$$a_0^{(2)}=\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{6},$$

$$a_1^{(2)}=\int_0^1 \frac{x(x-1)}{-\frac{1}{4}}\,dx=\frac{2}{3},$$

$$a_2^{(2)}=\int_0^1 \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{6},$$

1) R. Cotes, Harmonia mensurarum (1722).

所以

$$I_2=\frac{1}{6}\Big[f(0)+4f\Big(\frac{1}{2}\Big)+f(1)\Big]. \tag{127}$$

若对 $n=3,4,5,\cdots$ 繼續計算时，就得到哥特斯系数表

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{6} & & \frac{4}{6} & & \frac{1}{6} & & & \\
 & & \frac{1}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{1}{8} & & \\
 & \frac{7}{90} & & \frac{32}{90} & & \frac{12}{90} & & \frac{32}{90} & & \frac{7}{90} & \\
\frac{19}{288} & & \frac{75}{288} & & \frac{50}{288} & & \frac{50}{288} & & \frac{75}{288} & & \frac{19}{288}
\end{array}$$

……………………………………………………

很明显，

$$a_m^{(n)}=a_{n-m}^{(n)},$$

这是从公式(125)中用变数代换 $x=1-x'$ 而得到的．

注意，并非所有的哥特斯系数都是正数．例如，

$$a_2^{(8)}=a_6^{(8)}=-\frac{464}{14175}<0.$$

例 2. 不难将前例中的公式推广到任意区間 (a,b) 上去．令

$$I=\int_a^b f(x)dx, \qquad x_m^{(n)}=a+\frac{m}{n}L,$$

其中 L 是区間的长：

$$L=b-a,$$

在积分

$$A_m^{(n)}=\int_a^b\frac{A_n(x)}{\Big(x-a-\frac{m}{n}L\Big)A_n'\Big(a+\frac{m}{n}L\Big)}dx,$$

$$A_n(x)=(x-a)\Big(x-a-\frac{L}{n}\Big)\cdots(x-a-L)$$

中用变数代换 $x=a+Lt$，就能断定

$$A_m^{(n)}=La_m^{(n)},$$

从而得出公式

$$I_n=L\sum_{m=0}^{n} a_m^{(n)} f\left(a+\frac{m}{n}L\right), \tag{128}$$

其中 $a_m^{(n)}$ 是哥特斯系数.

特别,例如

$$I_1=\frac{L}{2}[f(a)+f(b)], \tag{129}$$

$$I_2=\frac{L}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \tag{130}$$

例3. 試寫出計算积分

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

的近似公式,并把插补点取成为契比謝夫基点:

$$x_m^{(n)}=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

对应的系数 $A_m^{(n)}$ 为

$$A_m^{(n)}=\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x)}{(x-x_m^{(n)})\,T_n'(x_m^{(n)})}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{n}\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}d\theta=$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2n}\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos n\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}$$

为了計算最后一积分,采用复数代换

$$e^{i\theta}=z,$$

于是得到:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos n\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}=\frac{1}{i}\int_{(C)}\frac{z^n+z^{-n}}{z^2-2z\cos\frac{2m-1}{2n}\pi+1}dz,$$

其中 (C) 表示圓 $|z|=1$. 积分号下分式的分母有零点

$$z_1=e^{\frac{2m-1}{2n}\pi i}=\alpha \qquad \text{和} \qquad z_2=e^{-\frac{2m-1}{2n}\pi i}=\frac{1}{\alpha},$$

又因为当 $z=\alpha$ 或 $z=\frac{1}{\alpha}$ 时分子也等于零,所以由此可見积分号下的函数有唯一的 n 重極点 $z=0$. 积分就等于对应于这極点的殘数. 由于

$$\frac{1}{z^2-2z\cos\frac{2m-1}{2n}\pi+1}=\frac{1}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}=\frac{1}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\alpha^{\nu+1}-\frac{1}{\alpha^{\nu+1}}\right)z^{\nu},$$

所以我們断定未知殘数等于上面展开式中 z^{n-1} 的系数，即

$$\frac{a^n-\frac{1}{a^n}}{a-\frac{1}{a}}=\frac{(-1)^{m+1}}{\sin\frac{2m-1}{2n}\pi}.$$

由此得出，在所討論的情况中，所有系数 $A_m^{(n)}$ 彼此相等，同时它們的值可用很簡单的公式

$$A_m^{(n)}=\frac{\pi}{n}$$

給出．因此，积分的近似值可以取为

$$I_n=\frac{\pi}{n}\sum_{m=1}^{n}f\left(x_m^{(n)}\right),\qquad x_m^{(n)}=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi.$$

例 4. 試作一公式，用 $f(0)$，$f\left(\frac{N}{2}\right)$ 与 $f(N)$ 近似地表达和数

$$S=\sum_{\nu=1}^{N-1}f(\nu),$$

并且，当 $f(x)$ 是二次多項式时，它就給出了这和数的精确值．

用插补多項式

$$P(x)=f(0)+\left[f\left(\frac{N}{2}\right)-f(0)\right]\frac{x}{\left(\frac{N}{2}\right)}+\frac{1}{2}\left[f(N)-2f\left(\frac{N}{2}\right)+f(0)\right]\frac{x\left(x-\frac{N}{2}\right)}{\left(\frac{N}{2}\right)^2}$$

来代替 $f(x)$，并对变数 x 从 1 加到 $N-1$（应用第 10 节末所得到的公式），我們就得到表达式

$$\frac{1}{6}\frac{(N-1)(N-2)}{N}[f(0)+f(N)]+\frac{2}{3}\frac{N^2-1}{N}f\left(\frac{N}{2}\right).$$

在实际进行机械求积法时，很少应用高次插补多項式：为了不增加多項式的次数而达到必要的精确度，就将基本区間分成很多子区間，再应用同一公式，即(129)或(130)，到对应于这些区間的每一个积分上．

譬如，将基本区間分成 n 个相等的子区間 (x_m, x_{m+1})（其中 $x_m=a+\frac{m}{n}L$, $L=b-a$, $m=0, 1, \cdots, n-1$）并应用近似公式 (129) 于它們中間的每一个上，我們就得到所謂**梯形公式**：

$$I\approx\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}[f(x_m)+f(x_{m+1})]=$$

$$=\frac{L}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)].\qquad(131)$$

同样，从(130)就产生**抛物綫公式**或者又称为**辛卜森**[1]**公式**：

1) Th. Simpson, Mathematical dissertations on physical and analytical subjects (1743).

$$I \approx \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{n}\left[f(x_m) + 4f\left(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\right) + f(x_{m+1}) \right] =$$
$$= \frac{L}{6n}\left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + 4f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f(x_n) \right]. \tag{132}$$

公式(131)和(132)的几何意义非常簡单：在每个子区間上，曲綫$f(x)$的弧在第一种情况下被联結两端点的弦所代替；在第二种情况下，弧則被通过两端点和中間点的拋物綫所代替，这中間点的横坐标也就是端点横坐标的算术平均值。

我們轉而来討論机械求积法中的誤差估計。

哥特斯公式(128)的誤差范圍(例2)可用等式

$$\int_a^b R_n(x)dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A_n(x)dx$$

給出，由此得到

$$\left| \int_a^b R_n(x)dx \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |A_n(x)|dx.$$

这积分能直接計算出来。这样(在代換$x-a=Lt$之下)，我們得到：

$$\int_a^b |A_1(x)|dx = \int_a^b |(x-a)(x-b)|dx = L^3 \int_0^1 |t(t-1)|dt =$$
$$= L^3 \int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{1}{6}L^3,$$
$$\int_a^b |A_2(x)|dx = \int_a^b \left| (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \right| dx =$$
$$= L^4 \left[\int_0^1 \left| t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1) \right| dt = L^4 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left(\frac{1}{2} - t\right)(1-t)dt + \right.\right.$$
$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\left(t - \frac{1}{2}\right)(1-t)dt \right] = \frac{1}{32}L^4,$$

由此推得，公式(129)和(130)中的誤差范圍各为

$$\left| \int_a^b R_1(x)dx \right| \leqslant \frac{1}{12} M_2 L^3, \tag{133}$$

$$\left| \int_a^b R_2(x)dx \right| \leqslant \frac{1}{192} M_3 L^4. \tag{134}$$

为了得出梯形公式(131)的誤差范圍，只須注意，按公式(133)，对每一个子区間的誤差不超过$\frac{1}{12} M_2 \left(\frac{L}{n}\right)^3$，因而对整个基本区間的誤差不超过

$$n\cdot\frac{1}{12}M_2\left(\frac{L}{n}\right)^3=\frac{1}{12}M_2\frac{L^3}{n^2}. \tag{135}$$

完全同样，对于辛卜森公式則得：

$$n\cdot\frac{1}{192}M_3\left(\frac{L}{n}\right)^4=\frac{1}{192}M_3\frac{L^4}{n^3}. \tag{136}$$

分母中出現了 n^3 可以說明，如果子区間的数目相当大，用辛卜森公式可以达到多么高的精确度。

例 5. 从积分

$$\lg 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$$

出發，用梯形公式与辛卜森公式計算 lg2．当 $n=10$ 时，由梯形公式得：

$$\lg 2\approx\frac{1}{20}(1\times1+2\times0.9091+2\times0.8333+2\times0.7692+2\times0.7143+2\times0.6667+$$

$$+2\times0.6250+2\times0.5882+2\times0.5556+2\times0.5263+1\times0.5000)=0.69377;$$

当 $n=5$ 时，由辛卜森公式得

$$\lg 2\approx\frac{1}{30}(1\times1+4\times0.9091+2\times0.8333+4\times0.7692+2\times0.7143+4\times0.6667+$$

$$+2\times0.6250+4\times0.5882+2\times0.5556+4\times0.5263+1\times0.5000)=0.69314.$$

按梯形公式計算时，可能的誤差不超过

$$\frac{1}{12}M_2\cdot\frac{L^3}{n^2}=\frac{1}{12}\cdot2\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{600}=0.00167.$$

而在应用辛卜森公式时，可以断定誤差不会超过

$$\frac{1}{192}M_3\cdot\frac{L^4}{n^3}=\frac{1}{192}\cdot6\cdot\frac{1}{125}=\frac{1}{4000}=0.00025$$

（事实上，在后一情况下，五位小数全是正确的）．

例 6. 必須把区間(0, 1)分成多少段，才能使得用梯形公式或辛卜森公式計算拉普拉斯函数

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

在 $x=1$ 的值时，誤差不会超过 0.000001？ 因为

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}\right|=\left|(4x^2-2)e^{-x^2}\right|\leq 2,$$

$$\left|\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}\right|=\left|(12x-8x^3)e^{-x^2}\right|\leq 6,$$

所以在上述两种情况下，誤差的范圍分别由不等式

$$\frac{1}{12}M_2\frac{L^3}{n^2}<\frac{1}{6n^2}\qquad与\qquad\frac{1}{192}M_3\frac{L^4}{n^3}<\frac{1}{32n^3}$$

决定，因此必須分别令

$$n>408\qquad与\qquad n>31.$$

$\Phi(1)$的精确值为 0.8427.

例 7. 試計算橢圓积分

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}$$

之值.

答. 1.6858.

可以在与插补过程的收斂性同样的意义下来討論机械求积法的收斂性. 我們这里只提出一点. 若 $P_n(f;x)$是当 n 逐次增加时的插补多項式,而 $R_n(x)$ 是对应的余項,則与多項式 $P_n(f;x)$ 相联系的机械求积法的誤差是由积分

$$\int_a^b R_n(x)d\psi(x) \tag{137}$$

給出的. 如果在区間(a,b)中,数量 $R_n(x)$ 当 n 無限增大时一致趋向零,則积分(137)也趋向零. 所以,由插补过程收斂就可推出求积法收斂. 但是,即令当插补过程为發散时,求积法仍可能是收斂的. 以后,我們会遇到这一类的例子(第 55 节).

第 二 章

維尔斯德拉斯定理

21. 維尔斯德拉斯第一及第二定理的表述 按照思維的自然發展，为了要把一个在給定的区間上已知的連續函数近似地表成多項式，我們曾在第一章中选擇了插补的方法，也就是提出了寻求这样的一个多項式的問題，使得在这区間上某些預定的点处，这个多項式恰好与給定的函数取同样的值；同时，为了要使問題具有完全确定的性質，我們要求多項式的次数較插补点的个数少一。我們已經知道，在这些条件下，如果說插补多項式的存在与唯一已有保証，但对近似性質却不能这样說；相反，与插补点的个数和位置以及被插补函数的性質有关，在各基点之間的区間內，插补多項式与給定的函数有大小不等的誤差。甚至有这样的現象被指出来了，在某些情况下，当基点的个数增加时，插补多項式不趋近于給定的函数，而在各基点的中間振动却無限地扩大(第 17 节例 2)。由此可見，如果我們对于任意一个在給定的区間中連續的函数提出一致逼近的問題，那末，要解决这个問題，各种插补方法就不完全适用，而利用別的一些方法可能具有大得多的成效。本章就要講述这个問題。

在本章中我們要闡明，对于任意一个在有限閉区間中連續的函数，利用次数足够高的多项式来逼近它在原則上是可能的，并且要考虑这种逼近的各种不同方法。

其次，我們要証实拉格朗智的插补过程不能化为这种逼近法：就是說，任何一組插补基点不能有效保証插补式收斂于任意的連續函数(第 27 节，法柏定理)。

最后，我們要从可能的方法中指出拉格朗智的插补过程的这样的一种变形，使得对于給定的一組基点——用增高插补多項式的次数作代价——总能够对任意的連續函数达到無限制的一致逼近(第 28 节中的費叶方法，这也是維尔斯德拉斯定理一个証明)。

定理 1 (第一定理)．如果 $f(x)$ 是在有限閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續的实变数函数，那么無論 ε 是怎样小的一个預定的正数，总可找到这样的一个多項式 $P(x)$，使得对于变数 x 在所考虑的区間上的一切值，不等式

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{1}$$

成立．

定理 2(第二定理). 如果 $f(x)$ 是具有周期 2π 并且在基本区間 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上連續的实变数函数，那么無論 ε 是怎样小的一个預定的正数，总可找到这样的一个三角多項式 $T(x)$，使得对于变数 x 在所考慮的区間上的一切值，不等式

$$|T(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{2}$$

成立.

这两个定理可用另一种方式来表述：

定理 1′. 任一在有限閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續的实变数函数 $f(x)$，可以展开为在这区間上一致收斂的多項式級数.

定理 2′. 任一具有周期 2π 并且在基本区間 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上連續的实变数函数 $f(x)$，可以展开为在这区間上一致收斂的三角多項式級数.

实际上，設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ 是以零为極限的正数序列：

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

根据定理 1，可以选得这样的一列多項式 $P_n(x)$，使得对于 $a\leqslant x\leqslant b$ 不等式

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

成立.

由此可見，对于所考慮的区間上的一切值 x，

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

一致成立. 換句話說，多項式級数

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+[P_3(x)-P_2(x)]+\cdots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\cdots$$

在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收斂并且表示函数 $f(x)$. 于是由定理 1 推得定理 1′.

反之，設函数 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上可以展开为一致收斂的多項式級数

$$f(x)=Q_1(x)+Q_2(x)+\cdots+Q_n(x)+\cdots.$$

这就是說，不論 $\varepsilon(>0)$ 是怎样的小，总可选得这样大的正整数 n，使得对于所給区間上的一切值 x，有不等式

$$|f(x)-[Q_1(x)+Q_2(x)+\cdots+Q_n(x)]|<\varepsilon;$$

因此，如果我們令

$$P(x)=Q_1(x)+Q_2(x)+\cdots+Q_n(x),$$

就得到定理 1.

定理 2 与定理 2′ 的等价性可以完全同样地証明.

維尔斯德拉斯定理具有明显的几何解說. 函数 $y=f(x)$ (在定理 1 中) 可用这样

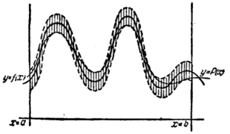


圖 10

的曲綫来表示，每一条平行于OY軸的直綫 $x=x_0(a\leqslant x_0\leqslant b)$ 都与它相交于一点且仅相交于一点．定理1断定說，当我們把这曲綫向上并向下平行于OY軸移动时，不論所得到的曲綫带形是怎样的"狹窄"(圖 10)，总可找到这样的一个多项式$y=P(x)$，使得对应于它的曲綫整个落在所說的带形內．关于定理2，类似的断言也是正确的．

附注 1. 我們知道，連續函数项的一致收斂級数的和表示一个連續函数．所以維尔斯德拉斯定理所指出的連續函数的性質，可以作为連續函数的定义：如果在区間 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上定义的函数 $f(x)$ 可以展开为在这区間上一致收斂的多项式級数，那么称它在这区間上是連續的．

附注 2. 我們只要就某一确定的区間 $(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 来証明定理1，就立刻可把它推广到任何有限区間$(a\leqslant x\leqslant b)$上去．事实上，如果函数$f(x)$在区間$(a\leqslant x\leqslant b)$上連續，那么函数

$$f_1(x)\equiv f\Big(\frac{b(x-\alpha)-a(x-\beta)}{\beta-\alpha}\Big)$$

就在区間$(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$上連續，因而可以选得一多项式 $P_1(x)$ 使得

$$|P_1(x)-f_1(x)|<\varepsilon \qquad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta).$$

于是，引进新的多项式

$$P(x)\equiv P_1\Big(\frac{\beta(x-a)-\alpha(x-b)}{b-a}\Big),$$

我們就得到

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

同样，定理2可以轉变到具有任意周期Ω的周期函数的情形．

附注 3. 定理1中区間的有限性与閉合性的假設是極重要的．实际上，定理(如無适当的改变)不能扩張到像区間$(a\leqslant x<\infty)$那样的情形；因为当变数無限地增大时，任一多项式的絕对值增大到無穷，因而由此已經可以看出，在这区間上連續函数$f(x)$不能任意选擇．同样不能用非閉的区間$(a<x\leqslant b)$来代替閉的区間$(a\leqslant x\leqslant b)$，因为任一多项式是在点 $x=a$ 处連續的，因此，如果$f(x)$只在 $a<x\leqslant b$ 中連續，但在 $x=a$ 处不連續，那末要用多项式来逼近它，会成为不可能的事．如在区間$0<x\leqslant\frac{2}{\pi}$中定义的函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$就是一个例子．

由于維尔斯德拉斯定理非常重要，我們在下面将給出定理1的三个不同的証明(第28节所說的費叶的証明不算在內)，再給出定理2的証明，并說明定理$1'$与定理$2'$中的一个可由另一个推出．

此外，在后面的叙述中还要介紹定理 2 的两个观点不同的証明：一个也是費叶的(第 43 节)而另一个是 С. Н. 伯恩斯坦的(第 44 节)。

与用多項式来逼近已知函数的可能性問題直接相联系的，是有关这逼近法的性質的另一个問題；换句話說，就是有关近似多項式的次数 n 与近似程度 ε 之間怎样相关联問題。关于这方面理論的一些主要結果，等到第四章那里再来叙述。

22. 第一定理的 A. 勒貝格的証明[1]　这一个証明可分成几个部分。

1°. 由等式

$$y=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0,\\ -x, & 当\ x\leqslant 0\end{cases}$$

所定义的函数 $y=|x|$ (圖 11)，可以展开为在区間 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收斂的多項式級数。

由泰乐級数的一般理論我們知道，不論 ε 是怎样的小，函数 $\sqrt{1-t}$ ($|t|<1$) 总可以展开为在区間 $|t|\leqslant 1-\varepsilon$ 上一致收斂的級数：

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2\cdot 4}t^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}t^n-\cdots.$$

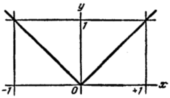


圖 11

不难証实，在所給的情况下，甚至在閉区間 $|t|\leqslant 1$ 上收斂性以及一致收斂性都成立。

事实上，泰乐展开式

$$f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n+R_n$$

中的余項可以写成积分的形状

$$R_n=\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(tu)(1-u)^n du,$$

在現在的情况下，有

$$R_n=-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdots 2n}t^{n+1}\int_0^1\left(\frac{1-u}{1-tu}\right)^n\frac{du}{\sqrt{1-tu}}.$$

1) H. Lebesgue[1].

因此，注意到当 $0\leqslant u\leqslant 1$ 时，$\frac{1-u}{1-tu}$ 不是負的并且是 u 的不增函数，所以 $\frac{1-u}{1-tu}\leqslant 1$，于是便得：

$$|R_n|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}},$$

不等式的右端不依賴于 t，当 n 無限增加时它趋近于零；因此

$$\lim_{n\to\infty}|R_n|=0$$

(对于区間 $|t|\leqslant 1$ 上所有的 t 值是一致的)。

令 $t=1-x^2$，我們得到展开式

$$|x|=+\sqrt{x^2}=+\sqrt{1-(1-x^2)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\frac{1}{2\cdot 4}(1-x^2)^2-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}(1-x^2)^n-\cdots,\quad (3)$$

对于滿足不等式

$$|1-x^2|\leqslant 1$$

或

$$|x|\leqslant\sqrt{2}$$

的 x 值，这个展开式是一致收斂的。

取級数 (3) 中足够多的項，就可以得到一个在区間 $|x|\leqslant 1$ 上的多項式，它与 $|x|$ 的誤差可任意小。

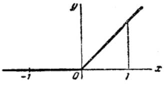


圖 12

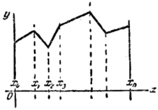


圖 13

2°. 由等式

$$\lambda(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0\end{cases}$$

所定义的函数 $y=\lambda(x)$ (圖12)，可展开为区間 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收斂的多項式級数。

这可从等式

$$\lambda(x)=\frac{|x|+x}{2}$$

推得。我們注意，$x>0$ 时函数 $\lambda(x)$ 是綫性的，$x<0$ 时也是如此。

3°．設 $y=\tau(x)$ 是在区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上定义的这样一个函数，它滿足等式

$$\tau(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1,$$

并且在所有区間 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上，它具有連續与綫性的条件，这就是說，

$$\tau(x)=y_{i-1}+(y_i-y_{i-1})\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \qquad (\text{当 } x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i),$$

那么 $\tau(x)$ 可以展开为在区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收斂的多項式級数。

在几何上，函数 $\tau(x)$ 可用頂点具有坐标 $M(x_i,\ y_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的折綫来表示(圖 13)。

上述断言的正确性可由这事实推出来，那就是我們可以把函数 $\tau(x)$ 表成下面的有限和：

$$\tau(x)=y_0+\sum_{i=0}^{n-1}c_i\lambda(x-x_i), \tag{4}$$

并且系数 c_i 由等式

$$\tau(x_k)=y_0+\sum_{i=0}^{k-1}c_i(x_k-x_i)=y_k \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

来决定；这些等式形成一可解方程組。

于是等式(4)对于点 x_i 成立，但它在各个区間上必定也成立，因为它的左右两端都是变数 x 的綫性函数。

我們令

$$K=\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|.$$

設 $P(x)$ 是这样的多項式，它在区間 $|x|\leqslant 1$ 上滿足不等式

$$|\lambda(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{K}.$$

于是我們有不等式

$$\left|\tau(x)-\left[y_0+\sum_{i=0}^{n-1} c_i P(x-x_i)\right]\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|\,|\lambda(x-x_i)-P(x-x_i)|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{K}\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|=\varepsilon,$$

所以

$$y_0+\sum_{i=0}^{n-1} c_i P(x-x_i)$$

是給出函数 $\tau(x)$ 的逼近的一个多項式.

4°. 現在可以在一般情况下来証明定理1. 設在区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上給定了連續函数 $f(x)$. 不論 $\frac{\varepsilon}{3}$ 是怎样小的数，总可以选得这样小的 $\delta(>0)$，使得由不等式

$$|x'-x''|<\delta \qquad (0\leqslant x'\leqslant 1, \qquad 0\leqslant x''\leqslant 1)$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

把区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分成这样的子区間 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，使得每个区間的长度 x_i-x_{i-1} 小于 δ. 如果 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，那么 $|x-x_i|<\delta$，因而

$$|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

作函数 $y=\tau(x)$ 使对应于頂点具有坐标 $(x_i, f(x_i))$ 的折綫. 如果 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，那么 $\tau(x)$ 显然夹在数 $\tau(x_{i-1})$ 与 $\tau(x_i)$ 之間，即 $f(x_{i-1})$ 与 $f(x_i)$ 之間，而由

$$|f(x_{i-1})-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

推出

$$|\tau(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

最后，設 $P(x)$ 是这样的多項式，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|\tau(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 x 屬于区間 $(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$ 时，我們得到：

$$|f(x)-P(x)|\leqslant|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-\tau(x)|+|\tau(x)-P(x)|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

因此，多项式 $P(x)$ 滿足定理 1 的要求.

23. 第一定理的E.兰道的証明[1]　在前面所叙述的維尔斯德拉斯定理的勒貝格証法中，以采用多角形折綫来替代已知連續曲綫作为出發点，而与定理發現者采用过的方法相近的兰道方法，則完全是在另一观点上建立起来的.

設 $\Omega_n(x,t)$ 是在区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1$ 上給定的两变数 x 与 t 的函数，并且它依賴于数碼 n，在这里 n 取一切的正整数值. 此外，还設 $\Omega_n(x,t)$ 滿足下列各条件：

1) $\Omega_n(x,t)$ 不是負的，并且对于变数 t 是可积分的，

2) 無論 δ 是怎样小的正数，关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-t|>\delta}\Omega_n(x,t)dt=0 \tag{5}$$

对于变数 x 的一切值是一致成立的，并且积分是展布在滿足不等式

$$|x-t|>\delta$$

的点 t 的范圍上的，

3)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-t|<\delta}\Omega_n(x,t)dt=1 \tag{6}$$

对于区間

$$\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta \qquad \left(0<\eta<\frac{1}{2}\right)$$

上的一切值 x 是一致的.

設 $f(x)$ 是定义在区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的任意一个連續函数. 引进函数

$$f_n(x)=\int_0^1\Omega_n(x,t)f(t)dt \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

不难証实

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \tag{7}$$

对于区間 $\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta$ 上的一切值 x 是一致的. 实际上，可以写

$$f_n(x)=\int_I\Omega_n(x,t)f(t)\,dt+\int_{II}\Omega_n(x,t)f(t)\,dt, \tag{8}$$

其中第一个积分展布在区間 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中滿足不等式 $|t-x|<\delta$ 的那些 t 值上，而第二个积分展布在区間的其余部分上. 我們这样来选取 δ，使得由不等式 $|x'-x''|<\delta$ 可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

1) E. Landau[1]；Ch. Vallée Poussin[1]大約同时提出了类似的方法.

由公式(8)显然推得：

$$f_n(x)-f(x)=\int_I \Omega_n(x,t)[f(t)-f(x)]dt+$$
$$+\int_{II}\Omega_n(x,t)[f(t)-f(x)]dt+f(x)\left[\int_0^1\Omega_n(x,t)\,dt-1\right].$$

所以

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\int_I \Omega_n(x,t)\,|f(t)-f(x)|\,dt+$$
$$+\int_{II}\Omega_n(x,t)\,|f(t)-f(x)|\,dt+|f(x)|\cdot\left|\int_0^1\Omega_n(x,t)dt-1\right|. \qquad (9)$$

設 M 是 $|f(x)|$ 在所考虑的区間上的最大值。如果 n 足够大，使得不等式

$$\left|\int_0^1\Omega_n(x,t)\,dt-1\right|<\frac{\varepsilon}{3M} \qquad (\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta)$$

与

$$\int_{II}\Omega_n(x,t)dt<\frac{\varepsilon}{6M}$$

[对于区間(0, 1)的一切值 x]都成立，那么注意积分号 $\int_I$ 下有 $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，而积分号 $\int_{II}$ 下有 $|f(t)-f(x)|\leqslant|f(t)|+|f(x)|\leqslant 2M$ 时，我們便由不等式(9)(假定 $\varepsilon<M$)得到：

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot\int_I\Omega_n(x,t)dt+2M\cdot\int_{II}\Omega_n(x,t)dt+M\cdot\left|\int_0^1\Omega_n(x,t)dt-1\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}\left(1+\frac{\varepsilon}{3M}\right)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{6M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

于是关系式(7)已建立。

为了要証明維尔斯德拉斯的定理 1，現在只要証实可以找到函数序列 $\Omega_n(x,t)$，这些函数具备 1)—3) 各性質并且是变数 x 的多項式；在最后这个条件下，函数 $f_n(x)$ 也是变数 x 的多項式。

兰道所指出的函数 $\Omega_n(x,t)$ 具有下面的形状[1]：

$$\Omega_n(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}[1-(x-t)^2]^n=\frac{[1-(x-t)^2]^n}{\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt}.$$

显然，$\Omega_n(x,t)$ 是 x 的多項式并且不能取負值[性質 1)]。另一方面，如果 $|x-t|$

1) 在第 157 頁上有分母中的积分的計算法。

$\geqslant\delta$，那么

$$\Omega_n(x,t)<\frac{(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}}(1-t^2)^n dt}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)^n,$$

而右端和$\frac{1}{n}$同时趋近于零[由此得性質 2)]。

最后我們設 $\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta$，$0<\eta<\frac{1}{2}$；于是我們得到：

$$\int_0^1\Omega_n(x,t)\,dt=\frac{\int_0^1[1-(t-x)^2]^n dt}{\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt}=\frac{\int_{-x}^{1-x}(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt}=$$

$$=1-\frac{\int_{-1}^{-x}(1-t^2)^n dt+\int_{1-x}^{1}(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt},$$

所以

$$\left|\int_0^1\Omega_n(x,t)\,dt-1\right|\leqslant\frac{\int_{-1}^{-\eta}(1-t^2)^n dt+\int_{\eta}^{1}(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt}=$$

$$=\frac{\int_{\eta}^{1}(1-t^2)^n dt}{\int_0^1(1-t^2)^n dt}<\frac{\int_{\eta}^{1}(1-t^2)^n dt}{\int_0^{\frac{\eta}{2}}(1-t^2)^n dt}<\frac{2}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{1-\frac{\eta^2}{4}}\right)^n.$$

最后这不等式的右端与$\frac{1}{n}$同时趋近于零[性質 3)]。于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\;\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\int_0^1 f(t)[1-(x-t)^2]^n dt$$

〔对于$\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta\ (0<\eta<\frac{1}{2})$是一致的〕。

所以，維尔斯德拉斯定理已就区間 $\eta\leqslant x\leqslant 1-\eta$ 証明了，因而对于任何有限的区間也就証明了。

24. 第一定理的 C. H. 伯恩斯坦的証明[1)]　C. H. 伯恩斯坦的方法能够避免一切計算，因为它的論証是在二項展开式

$$(p+q)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m} \tag{10}$$

1) С. Н. Бернштейн[1](1912).

的熟知性質上建立的．我們要簡略回忆一下著名的被称为“大数法則”的柏努利定理的內容；順便也要指出在定理的証明中为我們所需要的由 П. Л. 契比謝夫提出的細节．

設 E 是一件在若干次試驗的結果中可能發生的或不能發生的事件；設 x 是在試驗的結果中 E 發生的概率 ($0\leqslant x\leqslant 1$)．我們假定，試驗的次数 n 是任意的．用 m 表示在 n 次試驗的結果中事件 E 發生的次数．于是柏努利定理断定說，不論 η 与 δ ($\eta, \delta>0$) 是怎样小的数，对于足够大的值 n ($n>n_0=n_0(\eta, \delta)$)，不等式

$$\text{概率}\left\{\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta\right\}<\eta$$

成立(其中“概率{ }”表示括弧內的关系式的概率)．換句話說，使事件 E 發生的次数与任意的試驗次数之比与在单独試驗中事件發生的概率两者相差超过所給任意小数的那种概率，在試驗的次数足够大时会小于任意小的数．

契比謝夫天才地給出了这个定理的簡单証明，这个証明建立在应用数学期望的方法上，它可由下面的补助定理推出来：如果 U 是某一个量，在試驗的結果中可能取这种或者是另一种非負的数值，并且 A 是它的数学期望，那么

$$\text{概率}\left\{U>At^2\right\}<\frac{1}{t^2}, \tag{11}$$

其中 t 是任一正数．

如果我們令

$$U=\left(\frac{m}{n}-x\right)^2,$$

就可得到柏努利定理．大家知道，

$$A=\text{数学期望}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n},$$

由不等式(11)推得

$$\text{概率}\left\{\left|\frac{m}{n}-x\right|>\frac{t}{2\sqrt{n}}\right\}<\frac{1}{t^2};$$

然后只要取

$$t=\frac{1}{\sqrt{\eta}}, \qquad n_0=\left[\frac{1}{4\eta\delta^2}\right],$$

就証明了柏努利定理．

重要的是，上面給出的数 n_0 可算作不依賴于 x．

另一方面，我們注意，在 n 次試驗中事件 E 發生 m 次的概率等于

$$C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

显然，

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=1. \tag{12}$$

我們規定在記号

$$\sum_{m=0}^{n}=\sum\nolimits_{I}+\sum\nolimits_{II}$$

中，和 $\sum_I$ 是对那些使不等式 $\left|\frac{m}{n}-x\right|\leqslant\delta$ 成立的 m 值求和的，而和 $\sum_{II}$ 是对那些使相反的不等式 $\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta$ 成立的 m 值求和的。

显然，

$$\text{概率}\left\{\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta\right\}=\sum\nolimits_{II} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

根据柏努利定理，只要 $n>n_0$，就有

$$\sum\nolimits_{II} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<\eta. \tag{13}$$

至于和 $\sum_I$，則由公式(12)推得

$$\sum\nolimits_{I} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\leqslant 1. \tag{14}$$

有了这些初步說明以后，我們来討論 C. H. 伯恩斯坦指出的多項式。設 $f(x)$ 是在区間 $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上給定的任意一个連續函数。設 M 是它的模的極大值，并設 δ 是这样小的一个数，使得当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$。最后設 $\eta=\frac{\varepsilon}{4M}$。所說的多項式具有下面的形状：

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}. \tag{15}$$

我們来証明

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x)=f(x) \tag{16}$$

对于区間 $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上的一切值 x 是一致的。

事实上，令 $n>n_0$，并利用不等式(13)与(14)，我們得到：

$$|B_n(x)-f(x)|=\left|\sum_{m=0}^{n}f\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}-f(x)\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\right|=$$

$$=\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum\nolimits_I\left|f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)\right|C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+$$

$$+\sum\nolimits_{II}\left[\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right|+|f(x)|\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum\nolimits_I C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+2M\sum\nolimits_{II}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+2M\cdot\eta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

附注 1. 实际上前面所叙述的証明，不依賴于概率論及其原理；被利用到的是数学上一定的結果，那就是，对于 n 的一切足够大的值($n>n_0$, $n_0=n_0(\eta,\delta)$)不等式(13)成立；概率論中的术語却可以完全避免．要想証实这一点，我們直接来証明不等式(13)就好了(而这与柏努利定理的証明是等价的)．

因为在和

$$\sum\nolimits_{II}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}$$

中，m 的值滿足不等式 $\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta$，所以

$$\sum\nolimits_{II}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<\frac{1}{\delta^2}\sum\nolimits_{II}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta^2 n^2}\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}. \tag{17}$$

另一方面，把恒等式

$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=(p+q)^n \tag{18}$$

对于变数 p 微分，然后用 p 相乘，我們得到

$$\sum_{m=0}^{n}m\,C_n^m p^m q^{n-m}=np(p+q)^{n-1}, \tag{19}$$

再作一次同样的运算，得

$$\sum_{m=0}^{n}m^2 C_n^m p^m q^{n-m}=np(np+q)(p+q)^{n-2}. \tag{20}$$

在恆等式(18)，(19)与(20)中令 $p=x, q=1-x$，再分别用 n^2x^2，$-2nx$ 与 1 去乘它們并且相加起来，我們算出(17)式右端的和：

$$\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=nx(1-x)\leqslant\frac{1}{4}n.$$

因此，由不等式(17)推出：

$$\sum\nolimits_{II} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<\frac{1}{4\delta^2 n}.$$

显然，要不等式(13)成立，就只要把 n 选得大于 $\frac{1}{4\delta^2\eta}$，这就是所需要証明的一切。

附注 2. 不难了解，作为 E. 兰道与 C. H. 伯恩斯坦的方法的基础的，是同样的思想：区别在于依賴于連續变化的參数 t 的函数 $\Omega_n(x,t)$，在这里为依賴于整数指标 m 的函数

$$\Omega_n\left(x,\frac{m}{n}\right)=C_n^m x^m(1-x)^{n-m}$$

所代替，而积分

$$\int\Omega_n(x,t)f(t)dt$$

为相应的和

$$\sum\Omega_n\left(x,\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m}{n}\right)$$

所代替.

函数 $\Omega_n\left(x,\frac{m}{n}\right)$的性質完全类似于 $\Omega_n(x,t)$的性質．引用斯提叶斯积分

$$\int f(t)d_t\Psi_n(x,t)$$

并要求函数$\Psi_n(x,t)$滿足下列各条件：1)$\Psi_n(x,t)$是变数 t 的不减函数；2)在由不等式$|t-x|>\delta$(其中 δ 是任意小的正数)所定义的区間中，$\Psi_n(x,t)$的全变差当 n 無限增加时关于 x 一致地趋近于零；3) 在整个区間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，$\Psi_n(x,t)$ 的全变差当 n 無限增加时关于 x 一致地趋近于 1；这样就可以把上述两种情形統一起来.

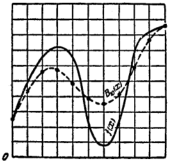


圖 14

例 1. 試作多項式 $B_{10}(x)$，使逼近于圖 14 中由經驗曲綫所給出的函数 $f(x)$．多項式 $B_{10}(x)$ 具有下面的形状：

$$\begin{aligned}B_{10}(x)=&0.25(1-x)^{10}+0.47\times10x(1-x)^9+0.65\times45x^2(1-x)^8+0.72\times120x^3(1-x)^7+\\&+0.65\times210x^4(1-x)^6+0.20\times252x^5(1-x)^5+0.08\times210x^6(1-x)^4+\\&+0.23\times120x^7(1-x)^3+0.69\times45x^8(1-x)^2+0.83\times10x^9(1-x)+0.86\times x^{10}.\end{aligned}$$

下面是在形如$\frac{m}{10}$的点处已知函数的值与近似多項式的值的对照表.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$B_{10}(x)$	0.25	0.43	0.56	0.57	0.48	0.38	0.35	0.41	0.58	0.77	0.86
$f(x)$	0.25	0.47	0.65	0.72	0.65	0.20	0.08	0.23	0.69	0.83	0.86

例 2. 試作适用于一般形状的区間(a,b)的伯恩斯坦多項式.

令$b-a=L, F(t)\equiv f(a+tL)$,我們写出关于函数$F(t)$的近似等式

$$F(t)\approx\sum_{m=0}^{n}F\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m t^m(1-t)^{n-m}.$$

重新引进函数$f(t)$并作替换$t=\frac{x-a}{L}$,我們得到:

$$f(x)\approx\sum_{m=0}^{m}f\left(a+\frac{m}{n}L\right)C_n^m\frac{(x-a)^m(b-x)^{n-m}}{L^n}.$$

例3. 試用伯恩斯坦多項式来逼近在区間$(-1,1)$中的函数$f(x)=|x|$.

多項式$B_{2n}(x)$可由下列公式給出:

$$B_{2n}(x)=\sum_{m=0}^{2n}\left|-1+\frac{m}{n}\right|C_{2n}^m\frac{(1+x)^m(1-x)^{2n-m}}{2^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{\nu=1}^{n}\nu\, C_{2n}^{n-\nu}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\nu+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\nu\right].$$

例 4. 試就区間(a,b)来計算对于函数$f(x)=e^{kx}$的$B_n(x)$.

答:

$$B_n(x)=e^{ka}\left[\left(\frac{b-x}{L}\right)+\left(\frac{x-a}{L}\right)e^{k\frac{L}{n}}\right]^n=e^{ka}\left[1+\left(e^{k\frac{L}{n}}-1\right)\frac{x-a}{L}\right]^n\qquad(L=b-a).$$

例 5. 試就区間$\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$来計算对于函数$f(x)=\cos x$的$B_n(x)$.

答:

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right].$$

25. С. Н. 伯恩斯坦多項式的若干性質　我們要估計当用多項式$B_n(x)$来代替已知函数$f(x)$时所产生的誤差的阶. 这时我們要对$f(x)$略为多假設一点: 設$f(x)$在区間$(0,1)$內具有連續的并且滿足里卜希茲条件

$$\omega_2(\delta)\leqslant K\delta \tag{21}$$

的二級导数$f''(x)$[其中$\omega_2(\delta)$是$f''(x)$的連續模].

首先我們注意，把恒等式(18)逐次对变数p微分并用p去乘，得到一些新的恒等式：

$$np(p+q)^{n-1}=\sum_0^n mC_n^m p^m q^{n-m},$$

$$n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np(p+q)^{n-1}=\sum_0^n m^2C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$n(n-1)(n-2)p^3(p+q)^{n-3}+3n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np(p+q)^{n-1}=$$

$$=\sum_0^n m^3C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)p^4(p+q)^{n-4}+6n(n-1)(n-2)p^3(p+q)^{n-3}+$$

$$+7n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np(p+q)^{n-1}=\sum_0^n m^4C_n^m p^m q^{n-m}$$

等等．这些恒等式經过$p=x, q=1-x$代入以后成为：

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^n C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=1,\\
&\sum_0^n mC_n^m x^m(1-x)^{n-m}=nx,\\
&\sum_0^n m^2C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=n(n-1)x^2+nx,\\
&\sum_0^n m^3C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=n(n-1)(n-2)x^3+3n(n-1)x^2+nx,\\
&\sum_0^n m^4C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^4+\\
&\qquad+6n(n-1)(n-2)x^3+7n(n-1)x^2+nx
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

等等．于是应用二項式公式，我們得到：

$$\sum_{m=0}^n (m-nx)^4C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=$$

$$=3n^2x^2(1-x)^2+nx(1-x)(1-6x+6x^2)<An^2,\tag{23}$$

其中A是常数，旣不依賴于x，也不依賴于n．

回轉来作逼近的估計，我們可以写出：

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{m=0}^{n}\left[f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

可是,因为按照泰乐公式有

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)=\left(\frac{m}{n}-x\right)f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 f''(\xi_n^{(m)})=$$

$$=\left(\frac{m}{n}-x\right)f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 f''(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2[f''(\xi_n^{(m)})-f''(x)],$$

并且 $\xi_n^{(m)}$ 介在 $\frac{m}{n}$ 与 x 之間,所以由此推得

$$B_n(x)-f(x)=f'(x)\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m}{n}-x\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+$$

$$+\frac{1}{2}f''(x)\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2[f''(\xi_n^{(m)})-f''(x)]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

因为右端的第一个和为零,而第二个和可化为 $\frac{x(1-x)}{n}$,所以由最后的等式得

$$\left|B_n(x)-f(x)-\frac{1}{2}f''(x)\cdot\frac{x(1-x)}{n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2|f''(\xi_n^{(m)})-f''(x)|C_n^m x^m(1-x)^{n-m}. \tag{24}$$

把最后这个和分成 $\sum_I$ 与 $\sum_{II}$ 两部分:凡使不等式

$$\left|\frac{m}{n}-x\right|\leqslant n^{-\frac{5}{12}}$$

成立的那些項都归入第一个和 $\sum_I$,而使这不等式不成立的那些項就归入第二个和 $\sum_{II}$.

在第一个和中,由不等式(21)我們得到:

$$|f''(\xi_n^{(m)})-f''(x)|\leqslant\omega_2(|\xi_n^{(m)}-x|)\leqslant\omega_2(n^{-\frac{5}{12}})\leqslant Kn^{-\frac{5}{12}},$$

因而

$$\sum_I\leqslant Kn^{-\frac{5}{12}}\sum_I\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<$$

$$<Kn^{-\frac{5}{12}}\sum\nolimits_{I} n^{-\frac{5}{6}}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\leqslant Kn^{-\frac{5}{4}}. \tag{25}$$

在第二个和中，

$$|f''(\xi_n^{(m)})-f''(x)|\leqslant 2M_2,$$

其中 M_2 是 $f''(x)$ 的最大模，因此

$$\sum\nolimits_{II}\leqslant 2M_2\sum\nolimits_{II}\left(\frac{m}{n}-x\right)^2 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<$$

$$<2M_2\sum\nolimits_{II} n^{\frac{9}{8}}\left(\frac{m}{n}-x\right)^4 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<$$

$$<2M_2 n^{\frac{9}{8}}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m}{n}-x\right)^4 C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

利用不等式(23)，于是又推出：

$$\sum\nolimits_{II}<2M_2 n^{\frac{9}{8}}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot An^2=2AM_2 n^{-\frac{7}{8}}. \tag{26}$$

比較不等式(24)，(25)与(26)，我們肯定：

$$\left|B_n(x)-f(x)-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f''(x)\right|<\frac{1}{2}Kn^{-\frac{5}{4}}+AM_2 n^{-\frac{7}{8}}.$$

所以我們最后得到[1)]：

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(x)-f(x)]=\frac{1}{2}x(1-x)f''(x), \tag{27}$$

或者，写成漸近等式的形状：

$$B_n(x)-f(x)\sim\frac{1}{2n}x(1-x)f''(x)^{2)}. \tag{28}$$

由此可見，函数 $f(x)$ 用 C. H. 伯恩斯坦多項式的逼近，至少在区間中所有一切使二級导数 $f''(x)$ 不为零的內点处，其阶是 $\frac{1}{n}$；如果又有 $f''(x)=0$，那么逼近的阶就更高。極妙的是，逼近的阶不依賴于函数 $f(x)$ 的性質[3)]。

C. H. 伯恩斯坦多項式的另一重要而有价值的性質，在此要提出如下[4)]。如果被逼近的函数 $f(x)$ 有連續的导数 $f'(x)$，那么各个逼近多項式 $B_n(x)$ 的导数以 $f'(x)$ 为其極限，即

1) 参考 E. B. Вороновская[1]与 C. H. Бернштейн[2].
2) 把这公式与第24节的数字例1中的結果对照一下是很有趣的.
3) 我們順便注意，为了簡化証明而引进的限制(21)实际上是不必要的.
4) И. Н. Хлодовский[1].

$$\lim_{n\to\infty} B'_n(x)=f'(x). \tag{29}$$

作出多項式 $B_{n+1}(x)$ 的导数：

$$B'_{n+1}(x)=\sum_{m=0}^{n+1} f\left(\frac{m}{n+1}\right)C_{n+1}^m[mx^{m-1}(1-x)^{n-m+1}-$$

$$-(n+1-m)x^m(1-x)^{n-m}]=$$

$$=(n+1)\sum_{m=0}^{n}\left[f\left(\frac{m+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{m}{n+1}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

其次，根据拉格朗習定理，由此推得：

$$B'_{n+1}(x)=\sum_{m=0}^{n} f'(\xi_n^{(m)})C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} f'\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+$$

$$+\sum_{m=0}^{n}\left[f'(\xi_n^{(m)})-f'\left(\frac{m}{n}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m} \qquad \left(\frac{m}{n+1}<\xi_n^{(m)}<\frac{m+1}{n+1}\right). \tag{30}$$

在等式(30)右端的第一个和趋向于極限 $f'(x)$，因为由假設导数 $f'(x)$ 是連續的。我們来証实第二个和趋向于零。用 $\omega_1(\delta)$ 表示函数 $f'(x)$ 的連續模，我們得到：

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f'(\xi_n^{(m)})-f'\left(\frac{m}{n}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=\omega_1\left(\frac{1}{n}\right),$$

由此推得所需要的結論。

也可以一般地証明，如果 $f(x)$ 具有連續的 k 級导数 $f^{(k)}(x)$，那么导数 $B_n^{(k)}(x)$ 有極限 $f^{(k)}(x)$：

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x) \qquad (k=1,2,\cdots). \tag{31}$$

实际上，

$$B_{n+k}^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n+k} f\left(\frac{m}{n+k}\right)C_{n+k}^m\frac{d^k}{dx^k}[x^m(1-x)^{n+k-m}]=$$

$$=\sum_{m=0}^{n+k} f\left(\frac{m}{n+k}\right)C_{n+k}^m\sum_{h=0}^{k}(-1)^{k-h}C_k^h[(m-h+1)\cdots m]\times$$

$$\times[(n+h-m+1)\cdots(n+k-m)]x^{m-h}(1-x)^{n+h-m}=$$

$$=\sum_{h=0}^{k}(-1)^{k-h}C_k^h\sum_{m=h}^{n+h} f\left(\frac{m}{n+k}\right)C_{n+k}^m\frac{m!}{(m-h)!}\,\frac{(n+k-m)!}{(n+h-m)!}x^{m-h}(1-x)^{n+h-m}=$$

$$=\sum_{h=0}^{k}(-1)^{k-h}C_k^h\sum_{m=0}^{n}f\left(\frac{m+h}{n+k}\right)C_{n+k}^{m+h}\frac{(m+h)!}{m!}\frac{(n+k-m-h)!}{(n-m)!}x^m(1-x)^{n-m}=$$

$$=\frac{(n+k)!}{n!}\sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{h=0}^{k}(-1)^{k-h}C_k^h f\left(\frac{m+h}{n+k}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

在对指标 h 求和的結果中，所得到的不是別的东西，而是函数 $f(x)$ 在点

$$x=\frac{m}{n+k}$$

处与增量 $\frac{1}{n+k}$ 相对应的 k 級有限差分；用 $\Delta_k f\left(\frac{m}{n+k}\right)$ 表示这个有限差分，我們有

$$B_{n+k}^{(k)}(x)=\frac{(n+k)!}{n!}\sum_{m=0}^{n}\Delta_k f\left(\frac{m}{n+k}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

但由第 10 节中等式(33)，我們得到：

$$\Delta_k f\left(\frac{m}{n+k}\right)=\left(\frac{1}{n+k}\right)^k f^{(k)}(\xi_n^{(m)}),$$

其中

$$\frac{m}{n+k}<\xi_n^{(m)}<\frac{m+k}{n+k},$$

因而可以写成

$$B_{n+k}^{(k)}(x)=\left(1-\frac{1}{n+k}\right)\left(1-\frac{2}{n+k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+k}\right)\sum_{m=0}^{n}f^{(k)}(\xi_n^{(m)})C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

或者，换一个写法，

$$B_{n+k}^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}f^{(k)}(x)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}+$$

$$+\sum_{m=0}^{n}[f^{(k)}(\xi_n^{(m)})-f^{(k)}(x)]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}-$$

$$-\left[1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+k}\right)\right]\sum_{m=0}^{n}f^{(k)}(\xi_n^{(m)})C_n^m x^m(1-x)^{n-m}. \quad (32)$$

在(32)的右端三个和中，第一个和等于 $f^{(k)}(x)$，第二个和趋近于零(这可像对于 $k=1$ 的情形一样加以証明)；最后，第三个和也趋近于零，因为在这个和的前面方括

弧中的因子無限地減小，而和的本身显然不超过 M_k，在这里，M_k 是 $f^{(k)}(x)$ 的最大模。于是等式(31)得到証明。

从已証明的命題順便推出这样的推論：如果函数 $f(x)$ 在区間 $(0,1)$ 中是無限級可微的，那么对于任何整数 $k(k\geqslant 0)$，多項式 $B_n^{(k)}(x)$ 一致地趋近于 $f^{(k)}(x)$。換句話說，級数

$$f(x)=B_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[B_{n+1}(x)-B_n(x)]$$

可以逐項微分任意多次。

当假定函数 $f(x)$ 在綫段 $(0,1)$ 上或者甚至在某个部分閉綫段 (a,β) $(0\leqslant a<\beta\leqslant 1)$ 上具备正則性时，可以作出更多的結論，那就是多項式 $B_n(x)$ 不仅在这个綫段上而且也在某个包含它的复数区域中一致收斂于 $f(x)$；由此自然推得極限关系 $B_n(x)\longrightarrow f(x)$ 的無限級可微性。推广多項式 $B_n(x)$ 的性質到复数区域上这种研究是由 Л. В. 康托洛維奇[1]于 1931 年开始的，并且在 С. Н. 伯恩斯坦的著作[3](1943)中得到了最后的完整成果。

26. 第二定理的証明以及第一定理与第二定理的联系 假定函数 $f(x)$ 是連續的并且具有周期 2π。要想証明定理 2，只要証明可以选得一个(关于变数 x 的)三角多項式序列

$$\Omega_n(x;t) \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

这些多項式(关于两个变数)具有周期 2π，并且在区域 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 中滿足下列各个要求：

1) 多項式 $\Omega_n(x,t)$ 不是負的并且对于变数 t 是可积分的；

2) 無論 δ $(\delta>0)$ 是怎样小的数，关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x+\delta}^{x+2\pi-\delta}\Omega_n(x,t)dt=0$$

对于基本区間中变数 x 的所有一切值一致地成立；

3) 关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\Omega_n(x,t)dt=1$$

对于基本区間中变数 x 的所有一切值一致地成立。根据第 23 节中一般的理由，这是很明显的事实。

由此看来，譬如說，可以令[1])

1) Ch. Vallée Poussin 的結果[1](1908)。

$$\Omega_n(x,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\cdot4\cdots2n}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cos^{2n}\frac{x-t}{2}=\frac{\cos^{2n}\frac{x-t}{2}}{\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt}.$$

实际上，首先知道 $\Omega_n(x,t)$ 确实是以 2π 为周期的三角多項式．这一点可由公式

$$\cos^2\frac{x-t}{2}=\frac{1}{2}[1+\cos(x-t)]=\frac{1}{2}(1+\cos x\cos t+\sin x\sin t)$$

以及 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的正整冪能用倍弧的余弦与正弦綫性地表达出来(按照隶莫佛尔公式)这一事实明显地看出．性質 1)是明显的．性質 2)可由以下事实推出：当

$$x+\delta<t<x+2\pi-\delta$$

时，不等式

$$\cos^{2n}\frac{x-t}{2}<\cos^{2n}\frac{\delta}{2};$$

另一方面，

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt>\int_0^{\frac{\delta}{2}}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt>\frac{\delta}{2}\cos^{2n}\frac{\delta}{4}.$$

所以在所説的区間中，

$$\Omega_n(x,t)<\frac{2}{\delta}\left(\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{4}}\right)^{2n},$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\Omega_n(x,t)=0$$

(一致成立)，由此推得 2)．最后，性質 3)可由性質 2)推出，只要注意

$$\int_0^{2\pi}\Omega_n(x,t)\,dt=\frac{\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\frac{x-t}{2}dt}{\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt}=1.$$

于是証明了

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\cdot4\cdots2n}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\int_0^{2\pi}f(t)\cos^{2n}\frac{x-t}{2}dt$$

(对于 x 的一切值一致地成立)．

定理 2 可以作为定理 1 的推論而得到．我們現在要叙述的証明屬于瓦莱・布散[1]．

---

1) 参考他的专著[2]．

我們首先假定,所給的連續的并且具有周期 2π 的函数 $f(x)$ 是偶的. 函数 $f(\arccos t)$ 在区間 $-1\leqslant t\leqslant +1$ 中关于变数 t 是連續的, 并且 $\arccos t$ 的值是选得滿足条件 $0\leqslant \arccos t\leqslant \pi$ 的. 根据定理 1,存在着这样的多項式 $P(t)$,使得不等式

$$|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon \qquad (-1\leqslant t\leqslant +1) \tag{33}$$

成立, 其中 ε 是任意小的正数. 可是这个不等式显然和下面的等价:

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \qquad (0\leqslant x\leqslant \pi). \tag{34}$$

在这里用 $-x$ 来替代 x[这是可以的, 因为 $f(x)$ 与 $P(\cos x)$ 是偶函数], 我們看出,如果不等式 (34) 可以这样表达的話, 自然它对于整个基本区間 $-\pi\leqslant x\leqslant +\pi$ 成立,因而对于 x 的一切值也成立.

轉到一般的情形, 我們現在假定 $f(x)$ 是任何一个以 2π 为周期的連續函数. 于是函数

$$\varphi(x)\equiv f(x)+f(-x),$$

$$\psi(x)\equiv[f(x)-f(-x)]\sin x$$

具有同样的性質, 并且除此以外,也有偶的性質. 根据已証明的事实,無論 ε 是怎样小的一个正数,可以指出这样的多項式 $P(t)$ 与 $Q(t)$,使得对于 x 的一切值,有不等式

$$|\varphi(x)-P(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\psi(x)-Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得:

$$|\varphi(x)\sin^2 x-P(\cos x)\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\psi(x)\sin x-Q(\cos x)\sin x|<\frac{\varepsilon}{2},$$

而最后用加法得到

$$|[\varphi(x)\sin^2 x+\psi(x)\sin x]-[P(\cos x)\sin^2 x+Q(\cos x)\sin x]|<\varepsilon,$$

即

$$|2f(x)\sin^2 x-T_1(x)|<\varepsilon, \tag{35}$$

其中 $T_1(x)$ 表示三角多項式

$$P(\cos x)\sin^2 x+Q(\cos x)\sin x.$$

把应用到 $f(x)$ 上的討論同样应用到函数 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 上去, 我們可指出这样的三角多項式 $T_2(x)$,使得它滿足不等式

$$\left|2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - T_2(x)\right| < \varepsilon.$$

在这里把 x 换为 $x-\frac{\pi}{2}$，我們得到：

$$|2f(x)\cos^2 x - T_3(x)| < \varepsilon, \tag{36}$$

其中 $T_3(x)$ 又是一个三角多項式．把不等式(35)与(36)相加起来并用 2 去除，我們得到：

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \tag{37}$$

其中 $T(x) \equiv \frac{T_1(x)+T_3(x)}{2}$ 是一三角多項式．

反之，定理 1 可同样地簡单地从定理 2 推出来．設 $f(x)$ 是在区間 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 上給定的連續函数．根据定理 2，存在着三角多項式 $T(x)$，对于 x 的一切值，它滿足不等式

$$|f(\cos x) - T(x)| < \varepsilon.$$

由此推知，把 x 换为 $-x$ 以后，有 $|f(\cos x) - T(-x)| < \varepsilon$，又有

$$\left|f(\cos x) - \frac{T(x)+T(-x)}{2}\right| < \varepsilon. \tag{38}$$

三角多項式 $T(x)$ 具有 $T(x) = C(x) + S(x)$ 的形状，其中

$$C(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx, \qquad S(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx.$$

因为显然

$$\frac{T(x)+T(-x)}{2} = C(x),$$

所以不等式(38)可变成下形：

$$\left|f(\cos x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx\right| < \varepsilon.$$

在这里用 $\arccos x$ 来代替 x，我們得到对于区間 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 上 x 的一切值都成立的不等式：

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)\right| < \varepsilon,$$

其中

$$T_k(x) = \cos k \arccos x$$

是契比謝夫多項式．于是定理 1 已証明．

附注． 定理 1 也可以从定理 2 用这样的方法得到．如果連續函数 $f(x)$ 譬如說是在区間

$-1\leqslant x\leqslant+1$上給定的，那末可以首先保持它的連續性，把它开拓到整个区間$-\pi\leqslant x\leqslant+\pi$上去，使得等式$f(-\pi)=f(+\pi)$成立；其次利用周期性条件$f(x+2\pi)=f(x)$把它开拓到$x$的一切值上去．在不等式

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

中(其中$T(x)$是三角多項式)，$T(x)$的每个形如$\cos kx$或$\sin kx$的項可以用由公式

$$\cos t=\sum\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin t=\sum\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{39}$$

得到的泰乐展开式中若干个項來代替，使得这时总的誤差不超过$\frac{\varepsilon}{2}$；于是得到滿足不等式

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

的通常多項式$P(x)$．

为了要用类似的方法从定理1导出定理2，可以利用泰乐展开式[1]

$$\arcsin x=\sum_{1}^{\infty}c_n x^n\qquad\left(|x|\leqslant 1,\ |\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

由此推得

$$x=\sum_{1}^{\infty}c_n\sin^n x, \tag{40}$$

并且在区間$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$上这式必然一致收斂．用$\frac{\pi}{2}-x$代替$x$，經过移項后我們得到

$$x=\frac{\pi}{2}-\sum_{0}^{\infty}c_n\cos^n x \tag{41}$$

(在区間$0\leqslant x\leqslant\pi$上具有一致收斂性)．

令$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，其中

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2},\qquad \psi(x)=\frac{f(x)-f(2\pi-x)}{2},$$

并且恒等式

$$\varphi(2\pi-x)=\varphi(x),\qquad \psi(2\pi-x)=-\psi(x)$$

显然成立．

設$P_1(x)$是求得的这样一个多項式，使得当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，

$$|\varphi(x)-P_1(x)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

在$P_1(x)$中用和

$$\frac{\pi}{2}-\sum_{0}^{N}c_n\cos^n x$$

1) 例如，参考 Г. М. Фихтенгольц 著，北京大学高等数学教研室譯：微积分学教程，第二卷第二分册，第十二章第414頁．

代替 x，其中 N 足够地大，使得用多項式

$$T_1(x)=P_1\left(\frac{\pi}{2}-\sum_0^N c_n\cos^n x\right)$$

来代替多項式 $P_1(x)$ 时，总的誤差不超过 $\frac{\varepsilon}{4}$，于是有不等式

$$|\varphi(x)-T_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\tag{42}$$

另一方面，設 $P_2(x)$ 是求得的这样一个多項式，使得 $|\psi(x)-P_2(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$（对于区間 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$）．利用公式(40)，我們像前面一样得到三角多項式

$$T_2(x)=P_2\left(\sum_0^{N'} c_n'\sin^n x\right),$$

它滿足不等式

$$|\psi(x)-T_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\tag{43}$$

不等式(42)与(43)对于 x 的一切值都"自动地"成立．令 $T_1(x)+T_2(x)=T(x)$，我們借此得到

$$|f(x)-T(x)|\leqslant|\varphi(x)-T_1(x)|+|\psi(x)-T_2(x)|<\varepsilon.\tag{44}$$

27. 关于插补基点的法柏定理 証实了（参考第 17 节例 2）在等距离基点的情形下，插补多項式不一定趋近于被插补的連續函数后，我們試問：是否終究不能这样来选擇插补基点，使插补过程对于任何連續函数都收斂？就这方面来看，譬如說契比謝夫的基点是否比較适当些？

在解答是肯定的情形下，我們就会得到維尔斯特拉斯定理的新的証明方法．

可是回答只能是否定的：任何一組基点都不能使得插补过程对于任何的連續函数收斂[1]．

为了証明这一点，我們必須从稍远一点的地方着手．同时我們要从三角的情形开始．

我們来証实下面的断言．不論变数 θ 的值如何以及正整数 n 的值如何，三角多項式

$$\lambda(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}$$

1) J. Faber [1](1914).

与

$$\mu(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\theta}{k} \tag{45}$$

都是一致有界的，这就是說它滿足不等式

$$|\lambda(\theta)|<L, \qquad |\mu(\theta)|<M, \tag{46}$$

其中 L 与 M 是絕对常数。

施行微分法，得到

$$\lambda'(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta=\frac{\sin2n\theta}{2\sin\theta}.$$

考察 $\lambda'(\theta)$ 的符号，我們肯定在区間 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上，$\lambda(\theta)$ 在点

$$\theta_m=\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad \left(m=1,2,\cdots,\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

处有極大值，并且在点

$$\theta'_m=\frac{m}{n}\pi \qquad \left(m=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

处有極小值．極大值 $\lambda(\theta_m)$ 随着数碼 m 的增加而減小。事实上，

$$\lambda(\theta_{m+1})-\lambda(\theta_m)=\int_{\theta_m}^{\theta_{m+1}}\lambda'(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{2m-1}{2n}\pi}^{\frac{2m+1}{2n}\pi}\frac{\sin2n\theta}{\sin\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2m-1}{2n}\pi}^{\frac{m}{n}\pi}\frac{\sin2n\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{2}\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{2m+1}{2n}\pi}\frac{\sin2n\theta}{\sin\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2m-1}{2n}\pi}^{\frac{m}{n}\pi}\sin2n\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)}\right)d\theta<0,$$

因为在积分的区間中，$\sin2n\theta$ 是負的，而在括号中的表达式是正的．同样極小值 $\lambda(\theta'_m)$ 随着 m 的增加而增加。最小的極小值等于

$$\lambda(\theta'_1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{n}}{2k-1};$$

因为在上面这个和中离首項与离末項位置相同的两項，其分子的絕对值相等，所以这些項的和是正的，因而 $\lambda(\theta'_1)>0$，由此推得当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\lambda(\theta)>0$。另一方面，在这同一个区間中，

$$\lambda(\theta)\leqslant\lambda(\theta_1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{2k-1}.$$

当 n 無限增大时，最后这个和显然有有限的極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{2k-1}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta>0.$$

由此推出不等式(46)中第一式——目前还只是对于区間 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 而言．为了要推广它到 θ 的一切值上去，只要注意

$$\lambda(\pi-\theta)=\lambda(\theta),\qquad \lambda(-\theta)=-\lambda(\theta).$$

轉到不等式(46)中第二式，我們来考虑新的多項式：

$$\lambda(\theta)-\frac{1}{2}\mu(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\theta}{2k(2k-1)}.$$

因为

$$\left|\lambda(\theta)-\frac{1}{2}\mu(\theta)\right|<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}=\lg 2,$$

所以利用不等式(46)中第一式，由此推得

$$|\mu(\theta)|<2(L+\lg 2)\equiv M.$$

现在可以証明，**多項式**

$$\nu(\theta)=\frac{\cos\theta}{n}+\frac{\cos 2\theta}{n-1}+\cdots+\frac{\cos n\theta}{1}-$$
$$-\frac{\cos(n+1)\theta}{1}-\cdots-\frac{\cos(2n-1)\theta}{n-1}-\frac{\cos 2n\theta}{n}$$

对于 θ 与 n 的任何值滿足不等式

$$|\nu(\theta)|<N, \tag{47}$$

其中 N 是一絕对常数． 事实上，

$$|\nu(\theta)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[\cos(n-k+1)\theta-\cos(n+k)\theta\right]\right|=$$
$$=\left|2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\sin(2k-1)\frac{\theta}{2}\right|\leqslant 2\left|\mu\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|<2M\equiv N.$$

由上所述，不难計算 N，可是 N 的数值如何，对以后来講不关重要．

因为要証明已給 n 次的插补多項式可以和被插补的函数有很大程度的差别，我們现在要討論一个基本补助定理，可是这个补助定理也有其独立的意义．

存在着一个正数 τ（絕对常数），它具有这样的性質：不論 θ_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 是区間 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上怎样的 $n+1$ 个不同的点，总可以作出一个 n 次的偶的（即可由余弦表达的）多項式 $T^*(\theta)$，使得 1）在各个点 θ_i 处它的絕对值不超过 1；

$$|T^*(\theta_i)|\leqslant 1 \tag{48}$$

并且 2)在某个点 $\theta=\theta^*$ 处，它满足不等式

$$|T^*(\theta^*)|\geqslant \tau\lg n. \tag{49}$$

令

$$\psi(\theta)=\frac{1}{N}\left(\frac{\cos\theta}{n}+\frac{\cos 2\theta}{n-1}+\cdots+\frac{\cos n\theta}{1}\right),$$

$$\chi(\theta)=-\frac{1}{N}\left(\frac{\cos\overline{n+1}\,\theta}{1}+\frac{\cos\overline{n+2}\,\theta}{2}+\cdots+\frac{\cos 2n\theta}{n}\right),$$

我們看出，对于任意的 n 与 θ，这些多項式的和

$$\varphi(\theta)\equiv\psi(\theta)+\chi(\theta)\left(\equiv\frac{\nu(\theta)}{N}\right) \tag{50}$$

的絕对值不超过 1：

$$|\varphi(\theta)|\leqslant 1. \tag{51}$$

用 α 表示某一个暂时未确定的、以后要加选擇的实数，并且作一个次数为 n 的偶的插补多項式 $T(\alpha,\theta)$，使得在各个点 θ_i 处，它所取的值与 $2n$ 次的多項式

$$\Phi(\alpha,\theta)\equiv\frac{1}{2}[\varphi(\alpha-\theta)+\varphi(\alpha+\theta)]$$

所取的值相同．这个多項式具有如下的形状：

$$T(\alpha,\theta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[\varphi(\alpha-\theta_k)+\varphi(\alpha+\theta_k)]l_k(\theta), \tag{52}$$

其中 $l_k(\theta)$ 是滿足条件(参考第 9 节)

$$l_i(\theta_k)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,\cdots,n)$$

的 n 次的偶三角多項式．注意公式(50)，又可以写

$$T(\alpha,\theta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[\psi(\alpha-\theta_k)+\psi(\alpha+\theta_k)]l_k(\theta)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[\chi(\alpha-\theta_k)+$$

$$+\chi(\alpha+\theta_k)]l_k(\theta)=\frac{1}{2}[\psi(\alpha-\theta)+\psi(\alpha+\theta)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[\chi(\alpha-\theta_k)+\chi(\alpha+\theta_k)]l_k(\theta),$$

因为 $\psi(\theta)$ 的次数等于 n，而 $\chi(\theta)$ 的次数高于 n．

令 $\theta=\alpha$，我們得到

$$T(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}\psi(0)+\left\{\frac{1}{2}\psi(2\alpha)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[\chi(\alpha-\theta_k)+\chi(\alpha+\theta_k)]l_k(\alpha)\right\}.$$

在大括弧中的表达式是参数 α 的三角多項式，其中的常数項等于零[1]。由此可见，可以这样选择 $\alpha=\alpha^*$，使得这个表达式成为零[2]。于是我們得到：

$$T(\alpha^*,\alpha^*)=\frac{1}{2}\psi(0)=\frac{1}{2N}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1}\right)>\frac{1}{2N}\lg n. \tag{53}$$

現在我們用等式

$$T^*(\theta)\equiv T(\alpha^*,\theta)$$

来定义 n 次多項式 $T^*(\theta)$。这个多項式滿足所提出的要求：

1) 由关系式(52)，$T^*(\theta_i)=T(\alpha^*,\theta_i)=\Phi(\alpha^*,\theta_i)$，因而

$$|T^*(\theta_i)|=|\Phi(\alpha^*,\theta_i)|\leqslant\frac{1}{2}[|\varphi(\alpha^*-\theta_i)|+|\varphi(\alpha^*+\theta_i)|]\leqslant 1,$$

2) 根据不等式(53)，令 $\theta^*=\alpha^*$，我們得到

$$T^*(\alpha^*)=T(\alpha^*,\alpha^*)>\tau\lg n \qquad \left(\text{其中}\ \tau=\frac{1}{2N}\right),$$

这就証明了我們的补助定理[3]。

所証的补助定理立刻可轉移到基本区間 $(-1,+1)$ 中的通常多項式上去：**存在着这样的正数** τ，**使得無論** $x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ **是区間** $-1\leqslant x\leqslant+1$ **上怎样的** $n+1$ **个不同的点，总可以作出一个具备下述性質的** n **次多項式** $P^*(x)$：

1°. $|P^*(x_i)|\leqslant 1 \qquad (i=0,1,\cdots,n),$

2°. $|P^*(x^*)|>\tau\lg n \qquad (-1\leqslant x^*\leqslant+1).$

[只要作一个对应于点 $\theta_i=\arccos x_i$ 的多項式 $T^*(\theta)$，然后令 $\cos\theta=x$，$\cos\theta^*=x^*$，并令 $P^*(x)=T^*(\arccos x)$。]

我們現在提出这样的問題：如果知道在区間 $(-1,+1)$ 中的 n 次多項式 $P(x)$ 在点 $x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 处的絕对值不超过 1，問在 $(-1,+1)$ 中它能取怎样的**最大值** G？因为

$$P(x)\equiv\sum_{i=0}^{n}P(x_i)L_i(x),$$

其中

1) 实际上，$l_k(\alpha)$ 只包含依賴于 $\cos m\alpha$ 的項，其中 $m\leqslant n$，而 $\chi(\alpha-\theta_k)+\chi(\alpha+\theta_k)$ 只包含依賴于 $\cos m\alpha$ 与 $\sin m\alpha$ 的項，其中 $m>n$，而作乘法时常数項不能产生。

2) 如果在三角多項式 $T(\theta)$ 中缺少常数項，則 $\int_0^{2\pi}T(\theta)d\theta=0$，这就表明在整个周期中 $T(\theta)$ 不能保持符号不变。

3) 所引的証明屬于L.費叶 (L. Fejér [1])。

$$L_i(x)=\frac{A(x)}{A'(x_i)(x-x_i)},\qquad A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

所以

$$|P(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|P(x_i)|\cdot|L_i(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|\leqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|=G.$$

設 x^* 是这样的点，使得

$$\sum_{i=0}^{n}|L_i(x^*)|=G.$$

[求得的 G 值是精确的，因为它是由条件 $Q_i(x)=\operatorname{sgn}L_i(x^*)$[1]所确定的 n 次多項式 $Q(x)$ 在点 x^* 处所达到的值.]

由前所証可見，無論点 $x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 如何，不等式

$$G>\gamma\lg n \tag{54}$$

一定成立.

我們現在来設想不論由取怎样任意的基点

$$x_m^{(n)}\qquad (m=0,1,\cdots n;\qquad n=1,2,\cdots)$$

而作出的插补过程. 設 G_n 是滿足不等式

$$|P(x_m^{(n)})|\leqslant 1\qquad (m=0,1,\cdots,n)$$

的 n 次多項式 $P(x)$ 的最大的絕对值；設 $Q_n(x)$是所說的一类中的多項式，它在某一点 x_n^* 处达到数值 G_n:

$$|Q_n(x_n^*)|=G_n. \tag{55}$$

对于我們来說，重要的是，从不等式(54)可推出

$$\lim_{n\to\infty}G_n=\infty. \tag{56}$$

各个数值 G_n 具有这样的性質，使得由不等式 $|f(x_m^{(n)})|\leqslant M$ 可得

$$|P_n(f;x)|\leqslant MG_n\qquad (-1\leqslant x\leqslant +1). \tag{57}$$

根据維尔斯德拉斯定理，我們来証明，不論 n 如何，总可以作出次数 $n'>n$ 的多項式 $R_{n'}(x)$，使得：

1°. $$|R_{n'}(x)|<2\qquad (-1\leqslant x\leqslant +1);$$

2°. $$|P_n(R_{n'},x_n^*)|>\frac{1}{2}G_n.$$

事实上，設 $F(x)$ 是滿足条件 $F(x_m^{(n)})=Q_n(x_m^{(n)})$ 与 $|F(x)|<1$ 的任意的連續

1) $\operatorname{sgn}X$ 表示 $+1,-1$ 或 0 依 X 为正，为負或等于零而定.

函数。根据維尔斯德拉斯定理，存在着这样的多项式 $R_{n'}(x)$，使得 $|R_{n'}(x)-F(x)|<\varepsilon$。現在可以把数 ε 选得这样的小，使得最后这个不等式保証不等式 1° 与 2° 成立；这可由下面的事实推出：$P_n(R_{n'};x_n^*)$ 是数量 $R_{n'}(x_m^{(n)})$ 的連續函数，这数与 $F(x_m^{(n)})$ 亦即与 $Q_n(x_m^{(n)})$ 的差可以任意地小，并且有等式 $|P_n(Q_n;x_n^*)|=|Q_n(x_n^*)|=G_n$。

选擇整数序列

$$n_0<n_1<n_2<\cdots<n_p<\cdots$$

及与之对应的多项式

$$R_{n_0'}(x),R_{n_1'}(x),R_{n_2'}(x),\cdots,R_{n_p'}(x),\cdots,$$

使得不等式

$$n_p<n_p'<n_{p+1}\qquad(p=0,1,2,\cdots)\tag{58}$$

与

$$G_{n_{p+1}}>G_{n_p}^2\qquad(p=0,1,2,\cdots)\tag{59}$$

成立；由公式(56)，最后的不等式是可能的。我們有：

$$|R_{n_p'}(x)|<2\qquad(-1\leqslant x\leqslant+1),\tag{60}$$

$$|P_{n_p}(R_{n_p'};x_{n_p}^*)|>\frac{1}{2}G_{n_p}.\tag{61}$$

現在可以作出連續函数 $f(x)$：

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}\cdot R_{n_p'}(x),\tag{62}$$

对于这个函数来說，与所給的基点組对应的插补过程是發散的。

函数 $f(x)$ 的連續性从不等式(60)以及級数 $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}$ 的收斂性[1]可以推得。我們現在来計算 $P_{n_k}(f;x)$：

$$P_{n_k}(f;x)=\sum_{p=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}\cdot R_{n_p'}(x)+\frac{1}{\sqrt{G_{n_k}}}\cdot P_{n_k}(R_{n_k'};x)+P_{n_k}(\rho_k;x),\tag{63}$$

其中已令

$$\rho_k(x)=\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}\cdot R_{n_p'}(x).\tag{64}$$

---

1) 事实上，令 $a_p=\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}$，我們利用(59)与(56)得到

$$\frac{a_{p+1}}{a_p}=\sqrt{\frac{G_{n_p}}{G_{n_{p+1}}}}<\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}\longrightarrow 0.$$

考虑(63)右端三項中的各項．由不等式(60)以及級数 $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}$ 的收斂性，知第一項当 k 增大时保持小于某一常数．对于第三項說，这也同样是正确的；事实上，由(64)可見

$$|\rho_k(x)|<2\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{G_{n_p}}}<\frac{2}{\sqrt{G_{n_{k+1}}}-1},$$

于是利用(56)，(57)与(59)推得：

$$|P_{n_k}(\rho_k; x)|<\frac{2G_{n_k}}{\sqrt{G_{n_{k+1}}}-1}<\frac{2\sqrt{G_{n_{k+1}}}}{\sqrt{G_{n_{k+1}}}-1}\to 2.$$

至于第二項，則如不等式(61)所指出，当 $x=x^*_{n_k}$ 时它大于 $\frac{1}{2}\sqrt{G_{n_k}}$，因而無限地增大．由所有这些結果推得

$$\lim_{k\to\infty} P_{n_k}(f; x^*_{n_k})=\infty,$$

可見 $P_n(f; x)$ 不一致趋近于 $f(x)$．

上面所說的法柏的否定結果可以与下面由爱尔得斯和杜兰所得到的肯定結果(P. Erdös 与 P. Turán [1])作一比較．要把后一結果叙述出来，我們采用后面第三章中所介紹的概念与术語．当利用平方收斂性替代一致收斂性以減弱收斂性概念时，"通用的"插补基点系是存在的．确切地說：

設 $p(x)$ 是在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上給定的某一个正的权；$\{\Phi_n(x)\}$ 是与权 $p(x)$ 相联系的正交多項式系；$x_m^{(n)}(m=1,2\cdots,n)$ 是多項式 $\Phi_n(x)$ 的根；$\{P_n(f,x)\}$ 是对于函数 $f(x)$ 作成的具有基点 $x_m^{(n)}(m=1,2,\cdots,n)$ 的拉格朗晉插补多項式系，$f(x)$ 是在所考虑的区間上給定的函数．在这情况下，不論 $f(x)$ 是区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上怎样的連續函数，平方收斂性

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\{P_n(f,x)-f(x)\}^2 p(x)dx=0 \tag{65}$$

总成立．

順便，由此立即推知，只要权 $p(x)$ 在我們的区間上具有正的下界

$$p(x)\geqslant m>0,$$

那么关系式(65)可以用不显含权的下列形式替代：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\{P_n(f,x)-f(x)\}^2 dx=0. \tag{66}$$

例如，在把勒讓德多項式的零点当作插补基点的情况下，这是成立的．

証明見那湯松著函数构造論 (И. П. Натансон[1]，第 543 — 549 頁)．

28. 費叶的收斂插补过程[1] 重新回到通常的拉格朗習插补法。虽然如我們所見，"通用的"拉格朗智的插补基点系不存在，但是，不論所給的被插补的連續函数如何，在适当选擇基点时，还是可能改变插补过程使得它收斂。这就是說，我們要証实，例如，当 $2n-1$ 次的插补多項式 $P_{2n-1}(x)$ 是这样地作出时，收斂性成立：在契比謝夫基点 $x_m^{(n)}=\cos\dfrac{2m-1}{2n}\pi$ 处，插补多項式与所給的函数符合：

$$P_{2n-1}(f;x_m^{(n)})=f(x_m^{(n)}),$$

并且在这些基点处，它們的导数为零：

$$P'_{2n-1}(f;x_m^{(n)})=0 \qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

关于多項式 $P_{2n-1}(f;x)$ 的公式可由第一章中公式(71)得到(第18节例题4)，并且包含有导数的項都失去了：

$$P_{2n-1}(f;x)=\sum_{m=1}^{n}f(x_m^{(n)})h_m^{(n)}(x), \tag{67}$$

其中

$$h_m^{(n)}(x)=\frac{1}{n^2}(1-x\,x_m^{(n)})\left[\frac{T_n(x)}{x-x_m^{(n)}}\right]^2, \qquad T_n(x)=\cos n\arccos x. \tag{68}$$

因为 $|x_m^{(n)}|<1$，并且假定了 $|x|\leqslant 1$，所以由(68)可見

$$h_m^{(n)}(x)\geqslant 0, \tag{69}$$

除此以外，在(67)中令 $f(x)\equiv 1$，我們断定

$$\sum_{m=1}^{n}h_m^{(n)}(x)\equiv 1. \tag{70}$$

注意到最后的等式，我們可以写：

$$f(x)=\sum_{m=1}^{n}f(x)h_m^{(n)}(x), \tag{71}$$

并且由(67)减去(71)，我們得到[利用不等式(69)]：

$$|P_{2n-1}(f;x)-f(x)|=\left|\sum_{m=1}^{n}[f(x_m^{(n)})-f(x)]h_m^{(n)}(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{n}|f(x_m^{(n)})-f(x)|h_m^{(n)}(x). \tag{72}$$

把最后这个和分成为两个

---

1) L. Fejér [1](1930).

$$\sum_{m=1}^{n}=\sum_{I}+\sum_{II},$$

凡使$|x_m^{(n)}-x|<\delta$的項列入和$\sum_I$之內，而使$|x_m^{(n)}-x|\geqslant\delta$的項列入和$\sum_{II}$之內，其中$\delta$是这样选擇的正数，使得由不等式$|x'-x''|<\delta$ $(-1\leqslant x'\leqslant 1,\ -1\leqslant x''\leqslant 1)$可得不等式$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$[由$f(x)$的連續性，这是可能的]。于是根据不等式(69)与公式(70)，我們对于第一个和得到：

$$\sum_I|f(x_m^{(n)})-f(x)|h_m^{(n)}(x)<\frac{\varepsilon}{2}\sum_I h_m^{(n)}(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=1}^{n}h_m^{(n)}(x)=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{73}$$

至于第二个和，則用M表示$f(x)$在綫段$(-1,+1)$上的最大模时，我們就得到：

$$\sum_{II}|f(x_m^{(n)})-f(x)|h_m^{(n)}(x)\leqslant 2M\sum_{II}h_m^{(n)}(x). \tag{74}$$

現在我們注意，当$|x_m^{(n)}-x|\geqslant\delta$时，由(68)推得：

$$h_m^{(n)}(x)\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{\delta}\right)^2=\frac{2}{\delta^2 n^2},$$

所以由不等式(74)可得：

$$\sum_{II}|f(x_m^{(n)})-f(x)|\cdot h_m^{(n)}(x)\leqslant\frac{4M}{\delta^2 n}.$$

因此，我們最后从(72)式得到：

$$|P_{2n-1}(f;x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{4M}{\delta^2 n}.$$

选取任意小的数ε，及与它相对应的δ，然后取次数n足够大，使得不等式

$$\frac{4M}{\delta^2 n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立，我們得到結論：

$$|P_{2n-1}(f;x)-f(x)|<\varepsilon.$$

不难了解，在費叶的插补过程中，收斂性是用了在插补多項式的次数增加到两倍的代价而达到。C.H.伯恩斯坦[4]証明了，同样的結果可以在增加到次数不大于$1+\varepsilon$倍(其中ε倍是任意小的数)时得到。

另一方面，費叶巳經証明[1]，多項式$P_{2n-1}(f;x)$的导数为零的条件可以大大地減弱：只要在插补基点处这些导数的值不增加得太快。例如，在条件

$$|P'_{2n-1}(f;x_m^{(n)})|<\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1-x_m^{(n)2}}}\cdot\frac{n}{\lg n} \qquad (\varepsilon_n\to 0) \tag{75}$$

下，定理的結論仍然有效(在那湯松書上第三章第5节中有証明(И. П. Натансон[1]))。

1) L. Fejér[1](1930).

第三章
平方逼近法

29. 用最小二乘法逼近函数．最簡单的离散点組的情况 假定要求出一多項式 $P(x)$，在給出的不同点 x_i 处取已知的值 $y_i(i=0,1,2,\cdots,m)$．这时一般說来，多項式 $P(x)$ 的次数不会小于 m；而如果次数 m 已規定，那么多項式 $P(x)$ 就可由拉格朗智插补公式算出来（第八节）．但是对于很大的值 m，作出拉格朗習插补多項式时自然会遇到非常繁复的計算；此外，如我們所已經看到的（第17节），如果数 y_i 是某一插补函数 $f(x)$ 的值 $f(x_i)$，那么大量的插补点远远不能保証用插补多項式可以較好地逼近函数．所以提出这样的問題是完全合宜的：寻求一多項式 $f(x)$，其次数为一小于 m 的已知数 n，要它在点 x_i 处即使不是确切地、也至少在某种誤差范圍內取值 y_i．

在这样的情况下通常所用的方法称作最小二乘法，并且可概述如下．我們想要选釋多項式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \qquad (n<m) \tag{1}$$

的系数 a_k 使得 $m+1$ 个等式

$$P(x_i)-y_i=0 \qquad (i=0,1,\cdots,m) \tag{2}$$

成立．一般說来这是不可能的；然而我們可以設法这样来选擇 a_k，使得这些等式左端的平方和（也就是在給出的各点处所求多項式与已給的值之間偏差的平方和）尽可能地小．換句話說，要使表达式

$$\sum=\sum_{i=0}^{m}[P(x_i)-y_i]^2 \tag{3}$$

成为極小．

如果設想在給出 $\sum$ 的公式中不用 $P(x_i)$ 而把它們的表达式(1)代入，那就会知道 $\sum$ 是系数 a_k 的函数，即一个二次多项式．此外，因为由公式(3)可知，$\sum$ 不可能取負值，所以極小值的存在可以認为早就确定了．極小值可能为正或者——对适当的值 x_i 与 y_i——等于零；在后一情况下所有等式(2)就恰好被滿足．为了要确定能使 $\sum$ 为極小的那些 a_k 的值，必須按照微分学的法則令 $\sum$ 对所有系数 a_k 的偏导数等于零．

于是我們便得一綫性方程組：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\sum}{\partial a_k}\equiv\sum_{i=0}^{m}[P(x_i)-y_i]x_i^k=0,$$

或者另写为

$$\sum_{i=0}^{m}P(x_i)x_i^l=\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^l \qquad (l=0,1,\cdots,n).$$

借公式(1)可以把这一方程組写成下列形状：

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+l}=\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^l,$$

或者令

$$c_p=\sum_{i=0}^{m}x_i^p \qquad (p=0,1,\cdots,2n), \qquad \gamma_l=\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^l \qquad (l=0,1,\cdots,n) \tag{4}$$

时，还可把它写成下列形状：

$$\sum_{k=0}^{n}a_kc_{k+l}=\gamma_l \qquad (l=0,1,\cdots,n). \tag{5}$$

方程組(5)有無唯一的解要看这一組的行列式

$$C_{n+1}=\begin{vmatrix}c_0 & c_1 & \cdots c_n\\ c_1 & c_2 & \cdots c_{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_n & c_{n+1} & \cdots c_{2n}\end{vmatrix}$$

是否异于零而定。我們来研究这一行列式。可以断定它的值可由公式

$$C_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\sum[W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)]^2 \tag{6}$$

給出，其中符号 W 表示房德蒙行列式，而它里面所含的每一数 ξ_i 在求和时都要取遍 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 的一切值。为了証明起見，我們写出：

$$[W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)]^2=W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)\sum_P[\nu_0\nu_1\cdots\nu_n]\xi_{\nu_1}\xi_{\nu_2}^2\cdots\xi_{\nu_n}^n,$$

而和数 $\sum\limits_P$ 正好就是把行列式 $W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 展开为 $(n+1)!$ 項的展式；这里求和法是在数 $(0,1,2,\cdots,n)$ 的一切置换 $(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 上进行的；而符号 $[\nu_0\nu_1\cdots\nu_n]$ 表示 $+1$ 或 -1，看置换 $(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 是偶的或奇的而定。先来討論对应于置换 $(0,1,\cdots,n)$ 的項，即 $\xi_1\xi_2^2\cdots\xi_n^n$。在行列式

$$W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_0^n & \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n\end{vmatrix}$$

的第二列中放进因子 ξ_1，在第三列中放进 ξ_2^2 等等，然后再对一切值 ξ_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 相加，便得行列式 C_{n+1}。若此后轉而考虑和数 $\sum\limits_{p}$ 中的任何一項，例如对应于置換 $(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ 的項，那就在行列式 W 中把各行作适当的置換，則因子 $[\nu_0\nu_1\cdots\nu_n]$ 平方起来即成为一了，而对 ξ_i 相加后，和前面一样，行列式又成为 C_{n+1}。因为 $n+1$ 阶行列式的項数等于 $(n+1)!$，由此便得等式(6)。

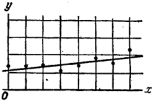


圖 15

由所証得的等式能作出論断：行列式 C_{n+1} 异于零，且为正数。事实上，因为 $m>n$，故[其平方出現在](6)式右端求和記号后的各房德蒙行列式中，一定有由 $n+1$ 个彼此不同的数 x_i 构成者，因而就异于零；但在这种情况下，上述和数就是正数。

这样，方程組(5)就只有一組解。

从方程(5)与等式(1)中消去各系数 a_k 就得到所求多項式 $P(x)$ 的公式：

$$P(x)\equiv P_n(x)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \cdots x^n \\ \gamma_0 & c_0 & c_1 & \cdots c_n \\ \gamma_1 & c_1 & c_2 & \cdots c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & c_n & c_{n+1} & \cdots c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

在这里数 c_p 与 γ_l 是用等式(4)确定的；特别，如 y_i 是某一函数 $f(x)$ 在点 x_i 处的值，則

$$\gamma_l=\sum_{i=0}^{m} f(x_i)x_i^l. \tag{8}$$

注意. 在我們要使之成为極小的表达式 $\sum$ 中，次数 2 不是隨便选取的，而是为了保証使微分后得出綫性方程組。

例 1. 試用最小二乘法求一次与二次多项式 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$，使它們与下列数据"相符"：

$x=0$	1	2	3	4	5	6	7
$y=1.4$	1.3	1.4	1.1	1.3	1.8	1.6	2.3

(圖 15)．我們得到

$$c_0=8,\quad c_1=28,\quad c_2=140,\quad c_3=784,\quad c_4=4676,$$
$$\gamma_0=12.2,\quad \gamma_1=47.3,\quad \gamma_2=252.9.$$

由此可見：

$$P_1(x)=-\begin{vmatrix}0 & 1 & x\\ 12.2 & 8 & 28\\ 47.3 & 28 & 140\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8 & 28\\ 28 & 140\end{vmatrix}\approx 1.142+0.110x,$$

$$P_2(x)=-\begin{vmatrix}0 & 1 & x & x^2\\ 12.2 & 8 & 28 & 140\\ 47.3 & 28 & 140 & 784\\ 252.9 & 140 & 784 & 4676\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8 & 28 & 140\\ 28 & 140 & 784\\ 140 & 784 & 4676\end{vmatrix}\approx 1.441-0.190x+0.043x^2.$$

例 2. 取一个一次多項式 $P(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 $x_m=\frac{m}{n}$ 处 $(m=0,1,\cdots,n)$ 的值"相符". 由公式(7)得:

$$P(x)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{m=0}^{n-1}f\left(\frac{m}{n}\right)[(2n-3m+1)+3(2m-3n)x].$$

30. 推广到連續区間的情况. 加权逼近 設 $f(x)$ 是給出在区間 (a,b) 上的函数, 要用 n 次多項式 $P(x)$ 来逼近它. 利用上述形式下的最小二乘法, 应該使和数

$$\sum=\sum_{i=0}^{m}[P(x_i)-f(x_i)]^2 \tag{9}$$

極小, 其中 $x_i(i=0,1,\cdots,m)$ 是从这一区間中用某种方式选出的一組点. 我們也可不用和数 $\sum$, 而使积分

$$I=\int_a^b[P(x)-f(x)]^2dx \tag{10}$$

極小. 不难了解, 当令 $x_i=a+\frac{L}{m}i(i=0,1,\cdots,m;L=b-a)$, 而在表达式 $\frac{L}{m}\sum$ 中取 m 無限增加时的極限, 就得到积分 I.

在构成和数 $\sum$ 时, 所有的点 x_i 起着同等的作用: 我們在討論时, 好像所有各等式(2)的被滿足是同等重要的. 然而可能由于某种原因, (2) 中的某些等式对我們有較大的重要性, 而其他的則次要些. 例如, 假若数据 y_i 是用不同的仪器进行观察而得来的, 那末, 当然我們就会对那些借較精确与較可靠的仪器而获得的数据有較大的信任与重視. 在数学上这可表达为: 使成为極小的和数 $\sum$ 要用更一般的和数

$$\sum=\sum_{i=0}^{m}p_i[P(x_i)-f(x_i)]^2 \tag{11}$$

来替代, 其中 p_i 是任意的正数, 称作**权**, 而此时和数 $\sum$ 称作**加权的**和数. 通常我們把权 p_i 来正規化, 使得它們的和等于一:

$$\sum_{i=0}^{m}p_i=1.$$

同样, 如果要在区間 (a,b) 上用多項式 $P(x)$ 来逼近一已給函数 $f(x)$, 由于某种原因

我們注意到在区間的某些部分上比起其他部分来要得到較精确的近似值，則自然地就要引进給出在基本区間上的某一非負函数 $p(x)$ 来作为"权"，而要使下形的"加权"积分

$$I=\int_a^b p(x)[P(x)-f(x)]^2dx \tag{12}$$

成为極小。

把所考慮的和数与积分两种情况都来推广，可以引进斯提叶斯积分

$$I=\int_a^b [P(x)-f(x)]^2d\psi(x), \tag{13}$$

其中 $\psi(x)$ 是某一在区間 (a,b) 中的不減函数；把它按照等式

$$\int_a^b d\psi(x)=1 \tag{14}$$

来正規化較为方便．函数 $\psi(x)$ 也称作权，但称作积分权，而把名称微分权保留給 $p(x)$．如果函数 $\psi(x)$ 是阶梯的，亦即只在基本区間的某些点 x_i 处作跳躍 p_i 而改变其值，那么积分(13)就有(11)的形状；如果函数 $\psi(x)$ 有連續的导数 $\psi'(x)\equiv p(x)$，那么这积分就化为(12)的形状．

最后，我們假定，逼近多項式 $P(x)$ 是"广义多項式"：

$$P(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x), \tag{15}$$

其中函数 $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 連續于区間 (a,b) 上且形成一綫性無关系．

我們的任务是：在"广义多項式"

$$P(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x) \tag{16}$$

中选擇系数 a_k 的值使积分

$$I=\int_a^b[P(x)-f(x)]^2d\psi(x) \tag{17}$$

为極小．

附注．在以后，函数 $\varphi(x)$ 以及 $f(x)$ 在基本区間上連續并非必要，只要必需用到的积分有意义就行了．然而，因为討論的是連續函数逼近理論，我們将設 $f(x)$ 是連續的；至于函数 $\varphi_k(x)$，那么（尽管下面的叙述带有極普遍的性質）只要把这些函数了解为多項式——通常的多項式或三角多項式——就行．

与前面所討論的特殊情况（第29节）一样，积分 I 不是負的而且是系数 a_k 的二次多項式．由此可見，極小值存在．微分后便得方程：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial a_k}=\int_a^b[P(x)-f(x)]\varphi_k(x)d\psi(x)=0,$$

或者

$$\int_a^b P(x)\varphi_k(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)d\psi(x)\quad(k=1,2,\cdots,n). \tag{18}$$

我們規定用縮写記号：

$$(\Phi,\Psi)\equiv(\Phi\Psi)=\int_a^b \Phi(x)\Psi(x)d\psi(x). \tag{19}$$

于是方程組(18)就成为

$$\sum_{i=1}^n a_i(\varphi_i\varphi_k)\equiv(f\varphi_k)\qquad(k=1,2,\cdots,n). \tag{20}$$

它的行列式

$$G_n=G(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=\begin{vmatrix}(\varphi_1\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1\varphi_n)\\ (\varphi_2\varphi_1) & (\varphi_2\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_n\varphi_1) & (\varphi_n\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n\varphi_n)\end{vmatrix} \tag{21}$$

（**格拉姆行列式**）不是負的[1]。事实上，重复并推广第29节的推理，不难断定下一等式成立：

$$G(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=$$
$$=\frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b D^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)d\psi(x_1)d\psi(x_2)\cdots d\psi(x_n). \tag{22}$$

我們将**假定**，格拉姆行列式 G_n 是正的：

$$G_n>0. \tag{23}$$

注意，这样的假定当下列二假設至少有一成立时就是对的：

1) 函数 $\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 綫性無关，且函数 $\psi(x)$ 的增长点分布得到处稠密。

在这一假定下可以求得(参看第19节)值 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 使得 $D(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\neq0$；于是在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某个邻域中，$D^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$。如果积分范圍分别换作每一点 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 的相应邻域，那末右端的重积分只会减小；而这样得出的重积分無疑是正的。

2) 函数 $\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 形成一契比謝夫系，且函数 $\psi(x)$ 有正跳躍的增长点的个数不小于 n。

---

1) 与此相关我們提出有名的布尼亚可夫斯基不等式：

$$\left[\int f(x)g(x)d\psi(x)\right]^2\leqslant\int f^2(x)\,d\psi(x)\cdot\int g^2(x)d\psi(x).$$

这一不等式是从格拉姆行列式

$$G(f,g)=\begin{vmatrix}(ff) & (fg)\\ (gf) & (gg)\end{vmatrix}$$

不可能为負而推得的。

事实上，如函数 $\psi(x)$ 有不少于 n 个的增长点 ξ_i，在这些点处函数有正的跳躍 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$，那么重积分(22)的值必不小于表达式

$$p_1p_2\cdots p_nD^2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),$$

而它显然有正值.

我們举两个例来說明假設 1)和 2)在实际应用中是有效的.

1) 要在区間 $(-1,+1)$ 中用形如 $P(x)=a_0+a_2x^2$ 的多項式来平方逼近已給函数 $f(x)$，并令 $\psi(x)=x$，亦即要使积分

$$\int_{-1}^{+1}[a_0+a_2x^2-f(x)]^2dx$$

为極小.

虽然系 $\{1,x^2\}$ 在 $(-1,+1)$ 中不是契比謝夫系，但由假設 1)这問題有唯一的解.

2) 要在区間 $(-1,+1)$ 中用任意系数的 n 次多項式 $P(x)$ 来平方逼近已給函数 $f(x)$，假定 $\psi(x)$ 是阶梯函数，其增长点为 $\xi_i=\dfrac{i}{N}$，在这些点的跳躍为 $p_i=\dfrac{1}{N}(i=1,2,\cdots,N)$；这就是要和数

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[P\Big(\frac{i}{N}\Big)-f\Big(\frac{i}{N}\Big)\Big]^2$$

为極小.

虽然增长点不是分布得到处稠密，但是在 $N>n$ 的条件下，由假設 2)，这問題有唯一的解. 順便提一下，契比謝夫[3]曾研究过同一类型的問題.

現在回到解方程組(20)，从等式(20)与恒等式 (16) 中消去各系数 a_k，便得所求的多項式:

$$P(x)\equiv P_n(x)=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ (f\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1\varphi_n)\\ (f\varphi_2) & (\varphi_2\varphi_1) & (\varphi_2\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (f\varphi_n) & (\varphi_n\varphi_1) & (\varphi_n\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n\varphi_n)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (\varphi_1\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1\varphi_n)\\ (\varphi_2\varphi_1) & (\varphi_2\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_n\varphi_1) & (\varphi_n\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n\varphi_n)\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{G_n}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x)\\ (f\varphi_1) & \\ (f\varphi_2) & G_n\\ \cdots & \\ (f\varphi_n) & \end{vmatrix}. \tag{24}$$

也很容易算出积分 I 的極小值. 实际上，由公式(24)得:

$$P_n(x)-f(x)=-\frac{1}{G_n}\begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(x)\cdots\varphi_n(x)\\ (f\varphi_1) & \\ \cdots & G_n\\ (f\varphi_n) & \end{vmatrix}. \tag{25}$$

另一方面，方程(20)有下列形状：

$$(P\varphi_k)=(f\varphi_k) \qquad (k=1,2,\cdots,n);$$

借公式(15)之助，从它們可推出

$$(P_n,P_n)=(f,P_n) \qquad \text{或} \qquad (P_n-f,P_n)=0.$$

所以把积分的極小值記作 μ_n 时，我們便得：

$$\mu_n=(P_n-f,P_n-f)=(P_n-f,P_n)-(P_n-f,f)=-(P_n-f,f).$$

再回到公式(25)，最后便有：

$$\mu_n=\frac{1}{G_n}\begin{vmatrix}(ff) & (f\varphi_1)\cdots(f\varphi_n)\\ (f\varphi_1) & \\ \cdots\cdots & G_n\\ (f\varphi_n) & \end{vmatrix},$$

也就是

$$\mu_n=\frac{G(f,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}{G(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}. \tag{26}$$

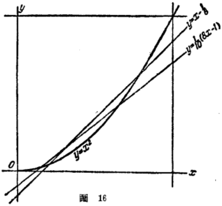


圖 16

例 1. 試用一次多項式 $P_1(x)$ 在区間 $(0,1)$ 上对常数权来平方逼近函数 $f(x)=x^2$（第 1 节例 5）。

在公式(24)中令

$$f(x)=x^2, \quad \varphi_1(x)=1, \quad \varphi_2(x)=x,$$

便得[算作 $\psi(x)\equiv x$]：

$$(\varphi_1\varphi_1)=1, \quad (\varphi_1\varphi_2)=(\varphi_2\varphi_1)=\frac{1}{2},$$

$$(\varphi_2\varphi_2)=\frac{1}{3}, \ (f\varphi_1)=\frac{1}{3}, \ (f\varphi_2)=\frac{1}{4},$$

所以

$$P_1(x)=-\begin{vmatrix}0 & 1 & x\\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=x-\frac{1}{6}$$

(圖 16)。

例 2. 对权 $p(x)=1-x$ 解同一問題。这样选擇权是为了要保証在区間的左端有較好的逼近。

在这种情况下，

$$(\varphi_1\varphi_1)=\frac{1}{2},\quad (\varphi_1\varphi_2)=(\varphi_2\varphi_1)=\frac{1}{6},\quad (\varphi_2\varphi_2)=\frac{1}{12},\quad (f\varphi_1)=\frac{1}{12},\quad (f\varphi_2)=\frac{1}{20},$$

因而

$$P_1(x)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix} = \frac{1}{10}(8x-1)$$

(参看圖 16).

例 3. 对常数权求出函数 $f(x)=\sin x$ 在区間 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上用二次多項式 $P_2(x)$ 的平方逼近.

答:

$$P_2(x)=\frac{6}{\pi}\Big[\Big(3+\frac{16}{\pi}-\frac{80}{\pi^2}\Big)-\frac{8}{\pi}\Big(3+\frac{28}{\pi}-\frac{120}{\pi^2}\Big)x+$$
$$+\frac{40}{\pi^2}\Big(1+\frac{12}{\pi}+\frac{48}{\pi^2}\Big)x^2\Big]\approx-0.0232+0.6269x+0.1771x^2.$$

31. 正交函数系 在一种特殊情况下,亦即当函数組 $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是正交的情况下,第 30 节中的各公式能大大地簡化.

已給在区間 (a,b) 上的二函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,如果

$$(fg)=\int_a^b f(x)g(x)\,d\psi(x)=0, \tag{27}$$

那么称它們[在已知区間中对于权 $\psi(x)$]是正交的[1].

已給在区間 (a,b) 上的函数 $f(x)$, 如果

$$(ff)=\int_a^b f^2(x)\,d\psi(x)=1, \tag{28}$$

那么称它[在区間 (a,b) 中对于权 $\psi(x)$]是正規的. 我們約定把函数系

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$$

称作[在区間 (a,b) 中对于权 $\psi(x)$]正交系[2],如果 1)組中任一函数是正規的,并且 2)組中任两不同函数是正交的:

$$(\varphi_i\varphi_i)=1 \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{29'}$$

$$(\varphi_i\varphi_j)=0, \qquad \text{当 } i\neq j \text{ 时} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{29''}$$

---

1) 不要直接把几何圖象与术語"正交函数"相联系起来(如果不引进所謂"泛函数空間"的概念). 这一术語的产生可以这样来說明:上面所写出的等式其左端是一些乘积的和的極限,而在通常的三維空間中二直綫正交的条件是

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$

其左端也是乘积的和;这二者之間在形式上相似.

2) 有时也把这种系称作正交正規系,而把正交系这一名称保留給只須滿足一个条件 2)的那种系.

如果在最好平方逼近的問題中已給的函数系 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是正交的，那么行列式 $G(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 化为等于一，而公式(24)变成如下：

$$P(x)\equiv P_n(x)=k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x), \tag{30}$$

其中

$$k_i=(f\varphi_i)=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)d\psi(x) \qquad (i=1,2,\cdots,n); \tag{31}$$

所以 k_i 正好就是使得平方偏差 I 为最小的各系数 a_i 的值[1]。公式(30)特别方便，因为給出函数 $f(x)$ 的平方逼近的次数逐次增加的“广义多項式”可以作为同一級数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}k_n\varphi_n(x) \tag{32}$$

的部分和而算出。另一方面，对于最好逼近 μ_n，我們就得到比(26)更簡单的表达式：

$$\mu_n=(ff)-(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2). \tag{33}$$

因为 μ_n 非負，故不論 n 是怎样，下一不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}k_i^2\leqslant(ff). \tag{34}$$

設已給一無穷的正交函数系

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots.$$

由不等式(34)可見，級数 $\sum_{i=1}^{\infty}k_i^2$ 收斂，而它的和不超过 (ff)：

$$\sum_{i=1}^{\infty}k_i^2\leqslant(ff) \tag{35}$$

(所謂“貝塞尔不等式”)。

由关系式(33)得知，数(“平方誤差”)

$$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,\cdots \tag{36}$$

形成一不增序列。然而这也可以更早地預先看出。事实上，在多項式 $P(x)$ 的次数不超过 n 时，μ_n 是积分 I 的極小值；在多項式次数不超过 $n+1$ 时，μ_n 是同一积分的極小值。既然第二个条件比第一个条件的限制少些，在第二种情况下的極小值就不会超过第一种情况下的極小值。所有的数 μ_n 从某个时刻起可能变为零，但是，显然这只有在函数 $f(x)$ 本身是有限个函数 $\varphi_k(x)$ 的綫性組合时才是如此。

1) 按公式(31)所确定的数 k_n 常常称作对于正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}(n=1,2,3,\cdots)$ 的广义傅立叶系数。大家把傅立叶系数(簡单地)了解为对应于三角系 (β,β') 的特殊情况(参看第82頁)的、由第176頁上公式(135)算出的数 A_n 与 B_n。

因为序列(36)是单調的，所以它有極限

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n,$$

μ 可能是正数或者等于零.

条件 $\mu=0$ 表明函数 $f(x)$ 可以用函数系 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 以任意小的平方誤差来逼近，这一条件为：

$$\sum_{i=1}^{\infty}k_i^2=(ff)$$

或

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_a^b f(x)\varphi_i(x)d\psi(x)\right]^2=\int_a^b f^2(x)d\psi(x). \qquad (37)$$

这同一个等式(37)，如被任一（在基本区間上連續的）函数 $f(x)$ 滿足，那么这就是系 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的封閉性[1]的条件．等式(37)有时称作巴塞伐等式．

容易明白，如果某一連續函数 $f(x)$ 与所給的封閉系 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots)$ 中的一切函数正交[2]，那末它就恒等于零．实际上，在巴塞伐公式(37)中，从左端等于零能推得右端等于零，而由此便推得[至少在 $\psi(x)$ 的增长点集合是稠密的条件下]函数 $f(x)$ 恒等于零．

正交系 $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1,2,\cdots)$ 的这样一性質，即从函数 $f(x)$ 与系中一切函数正交就能推出恒等式 $f(x)\equiv 0$，称作系的完备性．因此，我們已經証明了：正交系的完备性能从它的封閉性推出．

在一定的意义下，反过来也正确：正交系的封閉性能从它的完备性推出．可以設法証明这一命題如下．考慮給出的函数 $f(x)$ 与它的"广义傅立叶展开式"之間的差

$$F(x)\equiv f(x)-\sum_{j=1}^{\infty}(f\varphi_j)\varphi_j(x).$$

乘上 $\varphi_i(x)$ 并对 x 逐項积分，我們便会得到：

$$(F\varphi_i)=(f\varphi_i)-(f\varphi_i)=0 \qquad (i=1,2,\cdots);$$

于是从系的完备性得出 $F(x)\equiv 0$，也就是 $f(x)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}(f\varphi_i)\varphi_i(x)$；然后平方起来并积分，我們就会得到巴塞伐等式，也就是系的封閉性．如果能够确信級数

1) 这一名辞是 В. А. Стеклов 所引进的．参看"Основные задачи математической физики"，第一部分，第22頁(1922).

2) 也就是，所有广义傅立叶系数都等于零.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f\varphi_i)\varphi_i(x)$$

一致收斂，那末这种推理就是正确的。

但是一些例子指明，对于任意的連續函数$f(x)$不仅决不能保証上述級数一致收斂，甚至单純的收斂性也不能保証（参看后面第42节）。

然而，如果推广函数項級数（序列）的收斂概念，并同时也拓广所考察的函数类，那末完备性与封閉性間的联系又得以恢复（同时也使正交函数系理論具有完美性）。我們将在下一关系式的意义下来解説命題“函数序列$\{f_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$的一般項在基本区間(a,b)上趨近于函数$f(x)$”：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2d\psi(x)=0$$

（比一致收斂更一般的“平方收斂”，“平均收斂”）。我們还規定，积分处处都是在勒貝格意义下取的。我們将假定，所有的函数$\varphi_n(x)$以及$f(x)$都“平方可积”，也就是积分

$$\int_a^b\varphi_n^2(x)d\psi(x)$$

以及积分

$$\int_a^b f^2(x)d\psi(x)$$

在所述意义下收斂；由此推得（借布尼亚可夫斯基不等式之助），积分

$$(f\varphi_n)=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)d\psi(x)$$

亦收斂。

于是利用不等式(35)并从关于上述意义下推广的收斂性的、与哥西准則相类似的結果出發，可以証明（飞謝-黎斯定理）：級数

$$\sum_{j=1}^{\infty}(f\varphi_j)\varphi_j(x)$$

以某一函数为極限，它也平方可积，但不一定連續。此后，上面所提出的証法的以后各步就都有效了[1]。

非常重要的是請注意：在最好平方逼近的問題中，在唯一的假定

1) 讀者可在 И. П. Натансон 的書[1]中找得“在$L^2_{p(x)}$空間中”，也就是在基本区間上关于已知权$p(x)$[且$p(x)=\psi'(x)$]平方可积的函数类中最好逼近論的詳細叙述。

$$G_n>0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

下，不失一般性，永远可以假設所給的函数系 $\varphi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 是正交的。

为此，我們将証实，永远可以把一已給的綫性無关函数系 $\varphi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 正交化，也就是，永远可以把它用滿足下列要求的一新的函数系 $\Phi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 来代替：

1°. 任一函数 $\Phi_n(x)$ 是各函数 $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的綫性組合。

2°. 反过来，任一函数 $\varphi_n(x)$ 是各函数 $\Phi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的綫性組合。

3°. 系 $\Phi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 是正交的。

不难推断（例如用归納法），只可能存在一个函数系 $\Phi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 滿足所提出的諸要求，不过任一函数 $\Phi_n(x)$ 可差一个符号。我們不来証明这一断語，而直接把函数 $\Phi_n(x)$ 的表达式写出，并且驗証要求 1°—3° 被滿足。为簡便起見，令

$$(\varphi_i\varphi_k)=g_{ik} \qquad (i,k=1,2,\cdots) \tag{38}$$

与

$$G_0=1, \qquad G_n=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{39}$$

于是可以写：

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\pm\sqrt{G_{n-1}G_n}}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \cdots & g_{n-1,n} \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{40}$$

显然，要求 1° 被滿足。要求 2° 也同样被滿足：因为在行列式展开式中 $\varphi_n(x)$ 的系数等于 $G_{n-1}>0$，因此，$\varphi_n(x)$ 是函数 $\Phi_n(x)$ 及 $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 的綫性組合；但因 $\Phi_1(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 仅相差一常数因子，于是由归納法便得要求 2° 被滿足的結論。

进一步須驗証 $(\Phi_m\Phi_n)=0$（当 $m<n$ 时）。因为 $\Phi_m(x)$ 能用 $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 綫性地表达，故只要断定 $(\varphi_m\Phi_n)=0\ (m<n)$ 就够了。但这是显然的，因为，把行列式的最后一行乘上 $\varphi_m(x)$ 并积分，在行列式中便有两行一样。最后，为了要驗証等式 $(\Phi_n\Phi_n)=1$，我們来計算这行列式平方的积分。把行列式 G_n 中元 g_{ik} 的代数余子式記作 $G_{ik}^{(n)}$，我們将有：

$$\int_a^b \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n} \\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}^2 d\psi(x) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n G_{ni}^{(n)} \varphi_i(x)\right]^2 d\psi(x) =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_{ni}^{(n)} \varphi_i(x) \cdot \sum_{j=1}^n G_{nj}^{(n)} \varphi_j(x) d\psi(x) = \sum_{i,j}^{1\cdots n} G_{ni}^{(n)} G_{nj}^{(n)} g_{ij} = G_{n-1} G_n,$$

由此即得 $(\Phi_n \Phi_n) = 1$。

正交广义多項式 $\Phi_n(x)$ 可以从下面的極值性質算出。只要在表达式

$$\Psi_n(x) = \varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$$

中选擇系数 a_k，使得积分

$$(\Psi_n \Psi_n) = \int_a^b \Psi_n^2(x) d\psi(x)$$

尽可能地小，然后把所得的函数 $\Psi_n(x)$ 正規化；于是得到：

$$\Phi_n(x) = \frac{\Psi_n(x)}{\pm\sqrt{(\Psi_n \Psi_n)}}.$$

事实上，因为 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$ 恰好是函数 $-\varphi_n(x)$ 用函数

$$\varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

的平方逼近，故可由公式(25)并运用所引的縮写記法(38)与(39)，写出：

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{G_{n-1}} \begin{vmatrix} \varphi_n(x) & \varphi_1(x) \cdots \varphi_{n-1}(x) \\ g_{1n} & \\ \cdots\cdots & G_{n-1} \\ g_{n-1,n} & \end{vmatrix},$$

而这一最后表达式只与由公式(40)給出的函数 $\Phi_n(x)$ 相差一常数因子。

換句話說，可以定义 $\Phi_n(x)$ 作为形如

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

的正規广义多項式，而要系数 a_n 有(在絕对值的意义下的)最大值。

我們来考察，用正交多項式来逼近函数的理論怎样和在第 14 节中敘述的綫性泛函数正交系的理論相結合。如我們所看到的，要积分 I 成为極小，必須而且只須等式(18)成立；如令

$$U_m(f)=\int_a^b f(x)\varphi_m(x)d\psi(x) \qquad (m=1,2,\cdots,n),$$

可以把它写成下列形状(如同第14节中一样):

$$U_m(P)=U_m(f) \qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

我們把綫性泛函数 $U_m(f)$ 用按照第14节公式(82)所确定的并且与它等价的泛函数 $V_m(f)$ 来代替,不过在(82)中要用函数 $\varphi_k(x)$ 来替换方次 x^{k-1};这样我們得到:

$$V_m(f)=\begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_2(\varphi_1) & \cdots U_m(\varphi_1) \\ U_1(\varphi_2) & U_2(\varphi_2) & \cdots U_m(\varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1(\varphi_{m-1}) & U_2(\varphi_{m-1}) & \cdots U_m(\varphi_{m-1}) \\ U_1(f) & U_2(f) & \cdots U_m(f) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & \cdots U_m(\varphi_1) \\ \cdots & \cdots \\ U_1(\varphi_m) & \cdots U_m(\varphi_m) \end{vmatrix},$$

又因 $U_i(\varphi_k)=(\varphi_i\varphi_k)=g_{ik}$,由此推得:

$$V_m(f)=\frac{1}{G_m}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots g_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m-1,1} & g_{m-1,2} & \cdots g_{m-1,m} \\ (f\varphi_1) & (f\varphi_2) & \cdots (f\varphi_m) \end{vmatrix}=\sqrt{\frac{G_{m-1}}{G_m}}\cdot(f\Phi_m), \tag{41}$$

其中 $\Phi_m(x)\ (m=1,2,\cdots)$ 是与多项式 $\varphi_m(x)$ 相关联的正交多项式系. 为了要作出多项式 $L_m(x)$,我們利用第14节的公式(83),在其中也用函数 $\varphi_k(x)$ 替换方次 x^k:

$$L_m(x)=\begin{vmatrix} 1 & V_1(\varphi_2)\cdots V_1(\varphi_{m-1}) & V_1(\varphi_m) \\ 0 & 1 \quad \cdots V_2(\varphi_{m-1}) & V_2(\varphi_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 1 & V_{m-1}(\varphi_m) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\cdots\varphi_{m-1}(x) & \varphi_m(x) \end{vmatrix}. \tag{42}$$

不难推断,$L_m(x)$ 只与 $\Phi_m(x)$ 相差一常数因子,即:

$$L_m(x)=\sqrt{\frac{G_m}{G_{m-1}}}\cdot\Phi_m(x). \tag{43}$$

事实上,我們設想把多項式 $L_m(x)$ 按多项式 $\Phi_i(x)$ 展开:

$$L_m(x)=\sum_{i=1}^{m}k_i\Phi_i(x),$$

其中

$$k_i=(L_m\Phi_i) \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

但留意到

$$V_i(\varphi_k)=\begin{cases}1, & \text{当 } i=k,\\ 0, & \text{当 } i>k,\end{cases}$$

由(42)可見，

$$(L_m\Phi_i)=\sqrt{\frac{G_i}{G_{i-1}}}\begin{vmatrix} 1 & V_1(\varphi_2)\cdots V_1(\varphi_{m-1}) & V_1(\varphi_m)\\ 0 & 1 \quad \cdots V_2(\varphi_{m-1}) & V_2(\varphi_m)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 1 & V_{m-1}(\varphi_m)\\ V_i(\varphi_1) & V_i(\varphi_2)\cdots V_i(\varphi_{m-1}) & V_i(\varphi_m)\end{vmatrix}=0 \qquad (i<m),$$

而

$$(L_m\Phi_m)=\sqrt{\frac{G_m}{G_{m-1}}},$$

由此便得(43)。

比較等式(41)和(43)，按照第14节的理論，就得到形式的展开式

$$f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}(f\Phi_m)\Phi_m(x),$$

而这与直接建立的公式(32)等价。

32. 正交多項式的基本性質. 遞推公式. 零点的分布 我們来把第31节的結果应用到函数系 $\varphi_m(x)\,(m=1,2,\cdots)$ 是由逐次冪 $x^n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 所构成的情况；这时"广义"多項式就化成了普通多項式。假定已給出基本区間 (a,b)，并在其中給出的积分权为一不减函数 $\psi(x)$，它滿足条件

$$\int_a^b d\,\psi(x)=1$$

并且有無穷个增长点。

引进記法：

$$c_0=1, \qquad c_n=\int_a^b x^n d\psi(x),$$

$$C_0=1, \qquad C_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1\cdots c_{n-1}\\ c_1 & c_2\cdots c_n\\ \cdots & \cdots\cdots\\ c_{n-1} & c_n\cdots c_{2n-2}\end{vmatrix} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{44}$$

因为逐次冪的系在任何区間中綫性無关，而所有的数 C_n 不是别的，正是所討論

的系的各格拉姆行列式，所以它們一定是正数。

由前面，存在着唯一的多項式系 $\Phi_n(x)$，这些多项式有逐次遞增的(确切)次数 n，并且对已給的权在已給的区間上具有正交性：

$$(\Phi_i\Phi_k)=\int_a^b \Phi_i(x)\Phi_k(x)d\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases} \qquad (i,k=0,1,2,\cdots). \quad (45)$$

按照第31节公式(40)，这些公式有下列形状：

$$\Phi_0(x)=1, \qquad \Phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{C_nC_{n+1}}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1}\\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \qquad (n=1,2,\cdots), \quad (46)$$

并且方根的符号要用一个附加的条件取定：即要使多項式 $\Phi_n(x)$ 的最高項系数是正数，因而公式(46)中的根数有算术值。

多项式 $\Phi_n(x)$ 可由下列性質确定：

1) $\Phi_n(x)$ 与形如

$$P(x)=x^n+\cdots$$

而使积分

$$\int_a^b P^2(x)d\psi(x)$$

为極小的多項式只差一常数因子；

2) $\Phi_n(x)$ 是正規的多項式，也就是 $(\Phi_n\Phi_n)=1$；

3) 它的最高項系数是正数。

若 $f(x)$ 是已給在基本区間中的任意(連續)函数，那么使积分

$$I_n=\int_a^b[P_n(x)-f(x)]^2d\psi(x)$$

为極小的 n 次多項式恰好是形式展开式

$$f(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}k_m\Phi_m(x)$$

的前 $n+1$ 項的和，其中

$$k_m=(f\Phi_m),$$

所以

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}k_m\Phi_m(x).$$

积分 I_n 的極小値亦即平方誤差由下一公式給出：

$$\mu_n=(ff)-\sum_{m=0}^{n}(f\Phi_m)^2.$$

在我們現在所討論的情况下，也就是当多項式 $\Phi_m(x)$ 是 m 次通常多項式时，可以断定：对充分大的値 n，可以使平方誤差随意地小：

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n=0.$$

我們依靠維尔斯德拉斯定理（第二章）来証明它．按照这一定理，可以求得一个 n 次多項式 $P(x)$，使得对（有限）区間 (a,b) 中的任何値 x，不等式

$$|P(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$$

成立．这时显然

$$\int_a^b[P(x)-f(x)]^2\,d\psi(x)<\int_a^b\varepsilon\,d\psi(x)=\varepsilon,$$

亦即对于多項式 $P(x)$，积分 I 就已經小于 ε；旣然对于多項式 $P_n(x)$ 它为極小，因此积分

$$\mu_n=\int_a^b[P_n(x)-f(x)]^2d\psi(x)$$

就必須更小于 ε．

换句話說，逐次冪的系

$$1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$$

在任何（有限）区間中是封閉系．因而对于任一連續函数 $f(x)$，巴塞伐等式成立：

$$\sum_{m=0}^{\infty}(f\Phi_m)^2=(ff).\tag{47}$$

多項式 $\Phi_n(x)$ 有許多値得注意的性質，我們現在就来討論．首先，逐次多項式 $\Phi_{n-1}(x)$，$\Phi_n(x)$ 与 $\Phi_{n+1}(x)$ 以綫性遞推关系式

$$\alpha_1\Phi_1(x)-(x+\beta_0)\Phi_0(x)=0,$$

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\Phi_n(x)+\alpha_n\Phi_{n-1}(x)=0\quad(n=1,2,\cdots)\tag{48}$$

相关联；这里数 α_n 确定为多項式 $\Phi_{n-1}(x)$ 与 $\Phi_n(x)$ 的最高次項的系数的比：

$$\alpha_n=\sqrt{\frac{C_{n-1}}{C_n}}:\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}}=\frac{\sqrt{C_{n-1}C_{n+1}}}{C_n}\qquad(n\geqslant1),\tag{49}$$

而数 β_n 則由公式

$$\beta_n=\frac{C_n'}{C_n}-\frac{C_{n+1}'}{C_{n+1}}\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{50}$$

来确定，此处已令

$$C'_0=0, \qquad C'_1=c_1, \qquad C'_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1\cdots c_{n-2} & c_n \\ c_1 & c_2\cdots c_{n-1} & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n\cdots c_{2n-3} & c_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (n=2,3,\cdots). \tag{51}$$

为了証明起見，我們写出 $\Phi_n(x)$ 展开式的两个較高次項：

$$\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}}x^n-\frac{C'_n}{\sqrt{C_nC_{n+1}}}x^{n-1}+\cdots;$$

同样，

$$\Phi_{n+1}(x)=\sqrt{\frac{C_{n+1}}{C_{n+2}}}x^{n+1}-\frac{C'_{n+1}}{\sqrt{C_{n+1}C_{n+2}}}x^n+\cdots.$$

把第一个等式乘上

$$-(x+\beta_n)=-\left(x+\frac{C'_n}{C_n}-\frac{C'_{n+1}}{C_{n+1}}\right),$$

把第二个乘上

$$\alpha_{n+1}=\frac{\sqrt{C_nC_{n+2}}}{C_{n+1}},$$

然后相加：

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\Phi_n(x)=\frac{\sqrt{C_nC_{n+2}}}{C_{n+1}}\left(\sqrt{\frac{C_{n+1}}{C_{n+2}}}x^{n+1}-\frac{C'_{n+1}}{\sqrt{C_{n+1}C_{n+2}}}x^n+\cdots\right)-$$
$$-\left(x+\frac{C'_n}{C_n}-\frac{C'_{n+1}}{C_{n+1}}\right)\left(\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}}x^n-\frac{C'_n}{\sqrt{C_nC_{n+1}}}x^{n-1}+\cdots\right).$$

容易看出，右端中 x^{n+1} 与 x^n 的系数消掉了。因此，左端是一个次数不大于 $n-1$ 的多項式，因而可以表作多項式 $\Phi_i(x)\,(i=0,1,\cdots,n-1)$ 的綫性組合：

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\Phi_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\Phi_i(x). \tag{52}$$

乘上 $\Phi_m(x)\,(m<n-1)$ 并积分：

$$\alpha_{n+1}(\Phi_m\Phi_{n+1})-(x\Phi_m\Phi_n)-\beta_n(\Phi_m\Phi_n)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(\Phi_m\Phi_i).$$

因为 $m<n-1$，故注意到正交性条件(45)，并注意到 $x\Phi_m(x)$ 是次数小于 n 的多項式，因而 $(x\Phi_m\Phi_n)=0$ 时，对于任何 $m<n-1$ 便得 $\lambda_m=0$，所以等式(52)右端与 $\Phi_{n-1}(x)$ 只差一常数因子(这一因子当然与 n 有关，我們把它記作 ρ_n)，从而(52)化为

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\Phi_n(x)=\rho_n\Phi_{n-1}(x). \tag{53}$$

用 $\Phi_{n-1}(x)$ 乘最后这等式并积分，便得：

$$\alpha_{n+1}(\Phi_{n-1}\Phi_{n+1})-(x\Phi_{n-1}\Phi_n)-\beta_n(\Phi_{n-1}\Phi_n)=\rho_n(\Phi_{n-1}\Phi_{n-1}),$$

或者

$$-(x\Phi_{n-1}\Phi_n)=\rho_n. \tag{54}$$

另一方面，用 Φ_{n+1} 乘同一等式并积分，就会得到：

$$\alpha_{n+1}(\Phi_{n+1}\Phi_{n+1})-(x\Phi_n\Phi_{n+1})-\beta_n(\Phi_n\Phi_{n+1})=\rho_n(\Phi_{n-1}\Phi_{n+1}),$$

或者

$$\alpha_{n+1}-(x\Phi_n\Phi_{n+1})=0. \tag{55}$$

在等式(55)中把 n 换作 $n-1$，便得：

$$\alpha_n-(x\Phi_{n-1}\Phi_n)=0,$$

于是由等式(54)可得

$$\rho_n=-\alpha_n.$$

把这个值代入公式(52)，我們便得出遞推关系式(48)。

由所証得的公式

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\Phi_n(x)+\alpha_n\Phi_{n-1}(x)=0, \tag{48}$$

可推出关于多項式 $\Phi_n(x)$ 零点的一些推論，即：

1) 两个逐次多項式 $\Phi_n(x)$ 与 $\Phi_{n+1}(x)$ 不可能在同一个点 ξ 处为零。事实上，从 $\Phi_n(\xi)=\Phi_{n+1}(\xi)=0$，$\alpha_n\neq 0$ 就应有 $\Phi_{n-1}(\xi)=0$，等等。最后，我們就会得到等式 $\Phi_0(\xi)=0$，而这是不可能的，因为 $\Phi_0(x)\equiv 1$。

2) 如在某一点 ξ 处多項式 $\Phi_n(x)$ 为零，則多項式 $\Phi_{n-1}(x)$ 与 $\Phi_{n+1}(x)$ 在这一点处有不同的符号。实际上，如果 $\Phi_n(\xi)=0$，那么由公式(48)可得

$$\alpha_{n+1}\Phi_{n+1}(\xi)+\alpha_n\Phi_{n-1}(\xi)=0,$$

只要注意到 α_n 与 α_{n+1} 都是正数，由此便推得我們的論斷。

3) 多項式 $\Phi_n(x)$ 的全部零点是实的，在 $\Phi_n(x)$ 的两个接續零点之間有 $\Phi_{n-1}(x)$ 的一零点。最后这一命題可用归納法来証明。因为 $\Phi_1(x)$ 是一次多項式，所以它自然有一个实零点 $x_1^{(1)}$ [1)]。設現已証明 $\Phi_{n-1}(x)$ 的所有零点是实的，且在 $\Phi_{n-1}(x)$ 的两

---

1) 这一零点等于 $(-\beta_0)$，因为 $\Phi_1(x)=\frac{x+\beta_0}{\alpha_1}$。其次，从(48)可見，$\Phi_2(x)=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}[(x+\beta_0)(x+\beta_1)-\alpha_1^2]$。多項式 $\Phi_2(x)$ 的零点 $x_1^{(2)}$ 与 $x_2^{(2)}$ 由公式 $x_1^{(2)}=-\frac{1}{2}[(\beta_0+\beta_1)+\sqrt{(\beta_0-\beta_1)^2+4\alpha_1^2}]$ 与 $x_2^{(2)}=-\frac{1}{2}[(\beta_0+\beta_1)-\sqrt{(\beta_0-\beta_1)^2+4\alpha_1^2}]$ 給出，由此直接可見 $x_1^{(2)}<x_1^{(1)}<x_2^{(2)}$。

接續零点間存在着 $\Phi_{n-2}(x)$ 的零点（显然，只有一个）。設 $x_i^{(n-1)}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是 $\Phi_{n-1}(x)$ 的零点而 $x_i^{(n-2)}(i=1,2,\cdots,n-2)$ 是 $\Phi_{n-2}(x)$ 的零点，且

$$x_1^{(n-1)}<x_1^{(n-2)}<x_2^{(n-1)}<x_2^{(n-2)}<\cdots<x_{n-2}^{(n-1)}<x_{n-2}^{(n-2)}<x_{n-1}^{(n-1)}.$$

因为 $\Phi_{n-2}(x)$ 的最高次項的系数是正的，故

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi_{n-2}(x)=+\infty,$$

因而当 $x>x_{n-2}^{(n-2)}$ 时，$\Phi_{n-2}(x)$ 的符号为正，而当 $x_{n-3}^{(n-2)}<x<x_{n-2}^{(n-2)}$ 时，它为負，等等。

一般在区間 $x_{k-1}^{(n-2)}<x<x_k^{(n-2)}$ 中，

$$(-1)^{n-k-1}\Phi_{n-2}(x)>0 \qquad (k=2,3,\cdots,n-2).$$

特別，

$$(-1)^{n-k-1}\Phi_{n-2}(x_k^{(n-1)})>0.$$

但因 $\Phi_{n-1}(x_k^{(n-1)})=0$，故[由性質 2)]

$$(-1)^{n-k}\Phi_n(x_k^{(n-1)})>0.$$

这就已經指出在每一区間

$$(x_{k-1}^{(n-1)}<x<x_k^{(n-1)}) \qquad (k=2,3,\cdots,n-1)$$

中，$\Phi_n(x)$ 取零值。此外，由 $\Phi_{n-2}(x_{n-1}^{(n-1)})>0$ 推得 $\Phi_n(x_{n-1}^{(n-1)})<0$，又因 $\lim_{x\to+\infty}\Phi_n(x)=+\infty$，故当 $x>x_{n-1}^{(n-1)}$ 时，$\Phi_n(x)$ 还要取零值。最后同样可断定当 $x<x_1^{(n-1)}$ 时还存在一个零点。总共找到了 $\Phi_n(x)$ 的 n 个零点，且在 $\Phi_n(x)$ 的每两接續零点之間存在着 $\Phi_{n-1}(x)$ 的零点。

还可用別法来証明 $\Phi_n(x)$ 的所有零点是实的。假設 $\Phi_n(x)$ 只有 $m(0\leqslant m<n)$ 个实零点，設把它們記作

$$\xi_i \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

令

$$R(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\xi_i).$$

因为 $R(x)$ 的次数小于 $\Phi_n(x)$ 的次数，故必有：

$$(\Phi_n R)=0.$$

然而这是不可能的，因为乘积 $\Phi_n(x)R(x)$ 永远保持同一符号：事实上，它的一切零点的相重数是偶的[1)]。

最后这一推論可导致更确切的結果：

4) **多項式 $\Phi_m(x)$ 的一切零点都包含在基本区間 (a,b) 中。**

1) 譯者注：这是指它的实零点。复零点是共軛地成对出現的。

33. 特殊正交多項式系．契比謝夫多項式 我們現在从正交多項式的一般理論轉而討論其特例．由已給的基本区間及已給的权，我們就会計算系中的多項式．但在任意权的情况下这一計算会遇到極大的困难，因为把多項式 $\Phi_n(x)$ 写成行列式之形的公式(46)在实际运用中極不方便；遞推公式(48)也是如此，因为其中所含的系数也是用行列式表达的．所以那些多項式系，其簡便的一般表达式容易找出者，就有重大的意义．下列著名的系就是这种样子的：1)契比謝夫系，2)勒讓德系，3)雅谷比系，4)拉格叶尔系，5)厄米特系，以及与它們相关的一些系．

为了保持历史的真实性，这里必須提到，系 3)—5) 中每一个分別曾經是 П. Л. 契比謝夫研究的对象，同时他也是正交多項式（有任意权的）一般理論的創立者（参看[5]）．为簡便計，我們保留这通用的术語，而把"契比謝夫多項式"了解为"特殊的"契比謝夫多項式 $T_n(x)$．

上面列举的正交多項式系通常称作**古典系**．它們可以用下一性質来說明：与它們相对应的权 $p(x)$ 是从皮尔逊方程[1)]

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^2}$$

的解經綫性变換后得来的，而且还附加一条件，就是要所有的"矩"

$$\int x^n p(x)dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

存在(积分是取在基本区間上的)．参看杰克逊[1]第六章．

附注　以后(如像在第 4 节中曾做过)規定用下列記号．如 $L_n(x)$ 是一組多項式，只与对应于区間 (a,b) 及权 $\psi(x)$ 的正交系中的多項式 $\Phi_n(x)$ 相差一常数因子，那么我們将这样来記：1) 用 $\dot{L}_n(x)$ 表示 $L_n(x)$ 按照最高項系数等于一的条件而正規化的多項式，2) 用 $\hat{L}_n(x)$ 表示同一多項式的正規化多項式，但使**对于**权 $\psi(x)$，其平方的积分等于一．因此，

$$\dot{L}_n(x)=\frac{L_n(x)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_n(x)}{x^n}},\qquad \hat{L}_n(x)=\frac{L_n(x)}{\sqrt{(L_nL_n)}}=\Phi_n(x).$$

对于区間 $(-1,+1)$，**契比謝夫多項式系是由微分权**

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{56}$$

所确定的．

和通常一样，如果令

1) Н. Я. Сонин [1]早就遇到过这一方程．

$$T_n(x)=\cos n\arccos x=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n],$$

那么正交契比謝夫多項式系就由下列等式給出：

$$\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\arccos x \qquad (n=1,2,\cdots).$$

为了証明起見，只要引用关系式(参看第4节)：

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\hat{T}_i(x)\hat{T}_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & 当\ i\neq k\\ 1, & 当\ i=k\end{cases} \qquad (i,k=0,1,2,\cdots).$$

(事实上，在已給权的之下，函数系被正交性与正規性条件唯一地确定.)

因为(当 $n\geqslant 1$ 时)多項式 $T_n(x)$ 的最高項系数等于 2^{n-1}，故

$$\dot{T}_0(x)=T_0(x)=1, \quad \dot{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

如在第4节中所已指出，遞推关系式

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \tag{57}$$

能直捷地从恒等式

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$$

用代换 $\cos\theta=x$ 而推得.

在第4节中已經写出过前几个契比謝夫多項式的显示式；那里也曾詳細地研究过它們的零点的分布，而且这些結果应該拿来与第32节中各一般命題相对照.

与关于权(56)正交的契比謝夫多項式系相并列，需考察另一系，亦即在同一基本区間$(-1,+1)$上由权

$$p(x)=\sqrt{1-x^2} \tag{58}$$

所确定的正交多項式系. 可知，所說的多項式仅与多項式

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{59}$$

相差一常数因子. 事实上，从等式

$$\int_0^{\pi}\sin(i+1)\theta\sin(k+1)\theta\,d\theta=\begin{cases}0, & 当\ i\neq k\\ \frac{\pi}{2}, & 当\ i=k\end{cases} \qquad (i,k=0,1,2,\cdots)$$

用代换 $\cos\theta=x$ 便得：

$$\int_{-1}^{+1} U_i(x)U_k(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\begin{cases}0, & 当\ i\neq k,\\ \dfrac{\pi}{2}, & 当\ i=k.\end{cases}$$

注意下面一点是有益的：不計一常数因子，多項式 $U_n(x)$ 是多項式 $T_{n+1}(x)$ 的导数：

$$U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}]. \tag{60}$$

正規化后便得：

$$\dot{U}_n(x)=\frac{1}{2^n}U_n(x),\quad \hat{U}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n(x)\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

从恒等式

$$\sin(n+2)\theta=2\cos\theta\sin(n+1)\theta-\sin n\theta$$

就能推出与关系式(57)相类似的关系式：

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)\qquad (n=1,2,\cdots). \tag{57'}$$

多項式 $U_n(x)$ 的显示式如下：

$$U_0(x)=1,$$
$$U_1(x)=2x,$$
$$U_2(x)=4x^2-1,$$
$$U_3(x)=8x^3-4x,$$
$$U_4(x)=16x^4-12x^2+1,$$
$$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$$

等等.

显然，多項式 $U_n(x)$ 的零点为

$$x_m^{(n)}=\cos\frac{m\pi}{n+1}\qquad (m=1,\cdots,n),$$

它們分布得符合于第32节中的結果.

多項式 $T_n(x)$ 在基本区間 $(-1,+1)$ 中其絕对值不超过1，

$$|T_n(x)|\leqslant 1,$$

而对 $U_n(x)$ 的类似不等式就是

$$|U_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

对于每一已知的多項式 $U_n(x)$，当然存在着上界，即：

$$|U_n(x)|\leqslant n+1,$$

而且在 $x=\pm 1$ 时就达到这上界[1]。

比較上述二型的权的表达式，可以知道，借多項式 $T_n(x)$ 所得的逼近是在很大程度上考虑了被逼近函数在区間 $(-1,+1)$ 的两端的值，而借多項式 $U_n(x)$ 所得的逼近却是在很大程度上考虑了它在区間中部的值。

在权 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 之下，由平方逼近可得級数

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_n\hat{T}_n(x),\qquad k_n=\int_{-1}^{+1}f(x)\hat{T}_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

的有限項的和，或者另写为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nT_n(x),\tag{61}$$

其中已令

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

同样，在权

$$p(x)=\sqrt{1-x^2}$$

之下，就有平方逼近的公式：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_n\hat{U}_n(x),\qquad k_n=\int_{-1}^{+1}f(x)\hat{U}_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

或者

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_nU_n(x),\tag{62}$$

其中已令

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\cos\theta)\sin\theta\sin(n+1)\theta\,d\theta.$$

有时也称多項式系 $\{T_n(x)\}$ 为**第一种**契比謝夫多項式，而系 $\{U_n(x)\}$ 为**第二种**契比謝夫多項式。

---

1) 为了要証实这一点，我們来驗証不等式 $|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$。只要討論滿足不等式 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的值就够了。如果 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2n}$，則令 $\varphi(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta$ 时我們就会有 $\varphi'(\theta)=n(\cos\theta-\cos n\theta)\geqslant 0$，由此应得 $\varphi(\theta)\geqslant\varphi(0)=0$。而如 $\frac{\pi}{2n}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，那么 $\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}\geqslant\frac{1}{n}$，所以仍有 $\varphi(\theta)\geqslant 0$。

例 1. 試求在权 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 之下，函数 $f(x)=|x|$ 在基本区間 $(-1,+1)$ 中的逐次平方逼近.

計算 $|x|$ 按契比謝夫多項式展开的各系数，得：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|\cos\theta|\cos n\theta\,d\theta,$$

由此推得：

$$\begin{cases} a_{2n+1}=0, \\ a_{2n}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos 2n\theta\,d\theta=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \qquad (n=1,2,\cdots), \end{cases}$$

所以

$$|x|\sim\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cdot T_{2n}(x).$$

0 次、2 次及 4 次逼近多項式之形如下：

$$P_0(x)=\frac{2}{\pi},\quad P_2(x)=\frac{2}{3\pi}(4x^2+1),\quad P_4(x)=\frac{2}{15\pi}(-16x^4+36x^2+3)$$

(圖 17).

例 2. 在权 $p(x)=\sqrt{1-x^2}$ 之下，解决前題中同一問題.

$|x|$ 按多項式 $U_n(x)$ 展开的各系数由下面的公式給出：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|\cos\theta|\sin(n+1)\theta\sin\theta\,d\theta,$$

算出积分后得：

$$b_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)},\qquad b_{2n+1}=0\qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

由此推得：

$$|x|\sim\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}U_{2n}(x).$$

0 次、2 次及 4 次逼近多項式为

$$P_0(x)=\frac{4}{3\pi},\quad P_2(x)=\frac{8}{15\pi}(6x^2+1),\quad P_4(x)=\frac{4}{105\pi}(-80x^4+144x^2+9)$$

(圖 18).

例 3. 利用遞推关系式 (57)—(57′) 以及当 $n=0$ 与 1 时 $T_n(x)$ 与 $U_n(x)$ 的表达式，可以断定，契比謝夫多項式系 $T_n(x)$ 与多項式系 $U_n(x)$ 以下形的公式相关联：

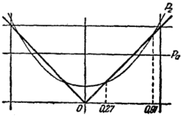


圖 17

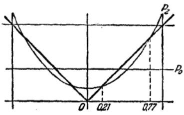


圖 18

$$U_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(\xi)-T_{n+1}(x)}{\xi-x}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (n\geq 0)$$

[参看后面第 45 节，公式(199)].

应用所得的公式来計算积分

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}d\theta,$$

这种积分在第 20 节例 3 中曾用別法計算过．我們只要把 n 换为 $n-1$，并令

$$\xi=\cos\theta,\qquad x=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi.$$

34. 勒讓德多項式[1] 区間$(-1,+1)$上的勒讓德多項式系 $X_n(x)$ 通常用所謂的罗德立克[2]公式来定义：

$$X_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{63}$$

特別，經計算便得出：

$$\left.\begin{aligned}X_0(x)&=1,\\X_1(x)&=x,\\X_2(x)&=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\X_3(x)&=\frac{1}{3}(5x^3-3x),\\X_4(x)&=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\\X_5(x)&=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

等等．

1) A. M. Legendre, Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes. Mém. math. phys. présentés à l'Acad. des Sciences, 10(1785).

2) Olinde Rodrigue(1814).

圖 19 能表出在基本区間中勒讓德多項式的性状.

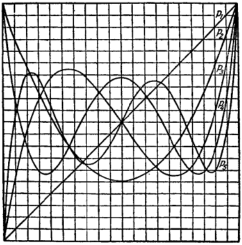


圖 19

我們来推断下列等式为真:

$$\int_{-1}^{+1} X_m(x) X_n(x) dx = 0 \qquad (m \neq n;\quad m, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{65}$$

与

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{66}$$

設 $n \geqslant m$, 由分部积分便得:

$$m!\,n!\,2^{m+n}\int_{-1}^{+1} X_m(x) X_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx =$$

$$= -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx = \cdots =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m \cdot (x^2-1)^n dx. \tag{67}$$

如 $m < n$, 那么在最后一积分号下的函数恒等于零, 因而积分本身为零. 而如 $m = n$, 那么(用 n 替换 m)我們把等式(67)写成下列形状:

$$(n!)^2 2^{2n} \int_{-1}^{+1} X_n^2(x) dx = (2n)! \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx. \tag{68}$$

再分部积分, 不难算出所得的积分:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx=\int_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n dx=\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{n+1}(1-x)^{n-1}dx=$$
$$=\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{n+2}(1-x)^{n-2}dx=\cdots=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n}dx=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1};$$

把它代入等式(68)，經約化后便得所需結果(66).

因此，把勒讓德多項式正規化，便得关于常数权

$$p(x)\equiv 1$$

的正交多項式系 $\hat{X}_n(x)$[1]，亦即下一等式成立：

$$\int_{-1}^{+1}\hat{X}_i(x)\hat{X}_k(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,2,\cdots),\tag{69}$$

其中

$$\hat{X}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}X_n(x)\qquad (n=0,1,2,\cdots).\tag{70}$$

所以已給在区間 $(-1,+1)$ 上的函数 $f(x)$，其按勒讓德多項式的展开式有下列形状：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_n\hat{X}_n(x),\qquad k_n=\int_{-1}^{+1}f(x)\hat{X}_n(x)dx,$$

或者

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nX_n(x),$$

其中

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_n(x)dx.\tag{71}$$

例 1. 試計算函数 $f(x)=|x|$ 在区間 $(-1,+1)$ 中对权 $p(x)=1$ 的逐次平方逼近.

因为勒讓德多項式当 n 为偶数时是偶函数，当 n 为奇数时是奇函数，故

$$\int_{-1}^{+1}|x|X_{2n}(x)dx=2\int_0^1 xX_{2n}(x)dx,\qquad \int_{-1}^{+1}|x|X_{2n+1}(x)dx=0,$$

因而

$$a_{2n}=(4n+1)\int_0^1 x\,X_{2n}(x)dx,\qquad a_{2n+1}=0\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

但把这些表达式分部积分便得：

1) 在等于一的常数权之下，得出 $\int_{-1}^{+1}p(x)dx=2$. 如果我們想有等式 $\int_{-1}^{+1}p(x)dx=1$，則应令 $p(x)=\frac{1}{2}$，于是就会得到[使公式(69)保持有效时] $\hat{X}_n(x)=\sqrt{2n+1}\,X_n(x)$.

$$\int_0^1 x X_0(x)dx=\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x X_{2n}(x)\,dx=\frac{1}{(2n)!\,2^{2n}}\int_0^1 x\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}dx=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$a_0=\frac{1}{2},\qquad a_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{4n+1}{2^{2n}}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

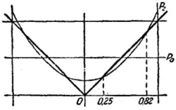


圖 20

由此便推得次数 $n=0,2$ 与 4 的逼近多項式的表达式如下：

$$P_0(x)=\frac{1}{2},$$

$$P_2(x)=\frac{3}{16}(5x^2+1),$$

$$P_4(x)=\frac{15}{128}(-7x^4+14x^2+1)$$

(圖 20).

勒讓德多項式除罗德立克公式外，还有另外一些簡便的表达式，我們就要来認識它們.

譬如，希萊弗里[1]把勒讓德多項式表为复积分的样子：

$$X_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{72}$$

其中(C)是圍着点 x 的任意閉路.

为了証明起見，我們注意，由哥西定理，积分等于被积函数在唯一極点 $z=x$ 的殘数. 多項式 $(z^2-1)^n$ 按冪 $z-x$ 的展开式中，$(z-x)^n$ 的系数等于 $\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，因而未知殘数是 $\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，而这不是别的，正是 $X_n(x)$.

从希萊弗里公式可以变到下一著名的拉普拉斯公式[2]：

$$X_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta. \tag{73}$$

設 x 是大于 1 的实数，我們令公式(72)中的閉路(C)是以 x 为中心以 $\sqrt{x^2-1}$ 为半徑的圓. 于是可以作变数更換

$$z=x+\sqrt{x^2-1}\cdot e^{i\theta},$$

1) Schläfli, Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen (1881).

2) Laplace, Mécanique céleste, 第11本，第二章(1796).

而 θ 从 0 变到 2π. 因为代入便得到

$$z^2-1=(z+1)(z-1)=(x+1+\sqrt{x^2-1}\cdot e^{i\theta})(x-1+\sqrt{x^2-1}\cdot e^{i\theta})=$$
$$=2\sqrt{x^2-1}\cdot e^{i\theta}(x+\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta),$$
$$z-x=\sqrt{x^2-1}\cdot e^{i\theta},$$

故簡化后得

$$X_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta,$$

这与公式(73)等价.

公式(73)对大于 1 的实值 x 已經証得了，但因 $X_n(x)$ 是多項式，所以它对一切值 x 为真；且根式符号如何选擇完全沒有关系，因为把被积函数按二項式定理展开然后积分时，含根号的各項一齐消去了.

为了記忆与計算某一数列

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{74}$$

以及推导这些数的某些性質，有时利用所謂**母函数**. 正是函数

$$G(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n+\cdots \tag{75}$$

称作关于序列(74)的母函数. 假定定义母函数 $G(t)$ 的冪級数在点 $t=0$ 的某一鄰域中收斂，所以函数 $G(t)$ 在这一点处正則，并且可能找得函数 $G(t)$ 的运用起来方便的某一簡便表达式.

当談到一函数序列(而不是数列)

$$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x), \cdots \tag{76}$$

时也可引进母函数；特别，我們感兴趣的是函数 $\alpha_n(x)$ 为次数 n 逐漸遞增的多項式时的情况. 于是，母函数当然也与变数 x 有关：

$$G(t,x)\equiv\alpha_0(x)+\alpha_1(x)t+\alpha_2(x)t^2+\cdots+\alpha_n(x)t^n+\cdots. \tag{77}$$

如已給一母函数，那么为要确定数(或函数) α_n，只要把它按变数 t 的冪展开，并取出各次冪的系数就对了.

我們将确証，关于勒讓德函数序列 $X_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，其母函数为：

$$G(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}. \tag{78}$$

換句話說，对于不論怎样的值 x 以及充分小的值 t($|t|<|x\pm\sqrt{x^2-1}|$)，恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)t^n \tag{79}$$

成立。事实上，在所作的假定下，利用拉普拉斯公式(73)，我們得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)t^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_0^{\infty}[t(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)]^n d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-t(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)} =$$

$$= \frac{1}{\pi t\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\frac{1-tx}{t\sqrt{x^2-1}}-\cos\theta}, \tag{80}$$

注意

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}},\ ^{1)} \tag{81}$$

我們就看到等式(80)的右端化成了$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$。由恒等式(79)能够得到勒讓德多項式的例如下列的性質。如在(79)中令 $x=1$，則母函数变为

$$G(t,1) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

比較 t^n 的系数便得到：

$$X_n(1) = 1 \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{82}$$

同样，令 $x=-1$ 便有

$$X_n(-1) = (-1)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{83}$$

此外，当 $x=0$ 时，由此推出：

$$X_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}, \quad X_{2n+1}(0) = 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots), \tag{84}$$

因为

$$G(t,0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}t^{2n}.$$

从母函数出發，也非常容易得出遞推关系式；如我們所知道的，各多項式 $X_n(x)$

---

1) 事实上，代入 $e^{i\theta}=\zeta$，并应用哥西綫数公式，我們得到：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{-2d\zeta}{\zeta^2-2z\zeta+1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\int_{(C)}\left(\frac{1}{\zeta-z+\sqrt{z^2-1}}-\frac{1}{\zeta-z-\sqrt{z^2-1}}\right)d\zeta = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

其中 (C) 表示以 0 为中心以 1 为半徑的圓。同时假定 z 不在区間 $(-1,+1)$ 上，并且必須固定根式 $\sqrt{z^2-1}$ 的値，使得下一不等式成立：

$$|z-\sqrt{z^2-1}|<1.$$

就是必须用这种式子关联起来. 因为

$$\frac{G'_t(t,x)}{G(t,x)}=\frac{x-t}{1-2tx+t^2},$$

所以

$$G'_t(t,x)(1-2tx+t^2)-G(t,x)(x-t)=0.$$

不用 $G(t,x)$ 与 $G'(t,x)$，而代入它們的 t 的冪級数展开式，并令 t^n 的系数等于零，便得：

$$(n+1)X_{n+1}(x)-(2n+1)x\,X_n(x)+n\,X_{n-1}(x)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots). \quad (85)$$

附注 遞推公式 (85) 在这里是独立地获得的，与第 32 节的一般結果無关. 如果認为事先已知存在着关系式(48)——在所給情况下可把它写成下列形状：

$$a_{n+1}\hat{X}_{n+1}(x)-(x+\beta_n)\hat{X}_n(x)+a_n\hat{X}_{n-1}(x)=0, \qquad (48')$$

——那么系数 a_n 与 β_n 容易借 $X_n(x)$ 当 $x=+1$ 与 $x=-1$ 时的值以及 $X_n(x)$ 的最高次項系数来确定. 事实上，注意自(63)与(70)可見，所述最高次項系数等于

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\sqrt{2n+1},$$

在恒等式(48′)中，令 x^{n+1} 的系数等于零，并把 n 换作 $n-1$，便得，

$$a_n=\frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

另一方面，因为

$$\hat{X}_n((-1)^n)=(-1)^n\sqrt{2n+1}$$

[这立刻可从拉普拉斯积分(73)看出]，所以在(48′)中令 $x=+1$ 与 $x=-1$，我們馬上就会有等式 $\beta_n=0$.

把 a_n 与 β_n 的值代入(48′)，并从正規化了的勒讓德多項式变为通常的，我們便得关系式(85).

例 2. 試作多項式 $T_n(x)$ 与 $U_n(x)$ 的母函数，并借助它們导出遞推公式(57)与(57′).

对于契比謝夫多項式 $T_n(x)$，母函数可求得如下：如果令 $x=\cos\theta$，那么

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nT_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos n\theta=\Re\sum_{n=0}^{\infty}(te^{i\theta})^n=\Re\frac{1}{1-te^{i\theta}}=$$

$$=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

同样对多項式 $U_n(x)$：

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nU_n(x)=\frac{1}{t\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}\sin(n+1)\theta=\frac{1}{t\sin\theta}\Im\sum_{n=0}^{\infty}(te^{i\theta})^n=$$

$$=\frac{1}{t\sin\theta}\Im\frac{te^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}=\frac{1}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1}{1-2tx+t^2}.$$

和勒讓德多項式一样，遞推公式可以用对于 t 的对数微分法而获得。

例 3. 从公式(79)出發，試直接驗証多项式 $X_n(x)$ 满足等式(65)与(66)。

把母函数 $G(u,x)$ 与 $G(v,x)$ 相乘，然后对 x 从 -1 积分到 $+1$，将有：

$$\int_{-1}^{+1} G(u,x)G(v,x)dx=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}X_i(x)X_k(x)dx\cdot u^i v^k=$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2ux+u^2}\cdot\sqrt{1-2vx+v^2}}=\frac{1}{\sqrt{uv}}\lg\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^n v^n,$$

于是，比較 $u^i v^k$ 的系数，便得(65)与(66)。

我們来推导一些不等式，表明勒讓德多項式的絕对值在区間 $(-1,+1)$ 上的上界。利用拉普拉斯公式，我們得到：

$$|X_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x^2+(1-x^2)\cos^2\theta]^{\frac{n}{2}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[1-(1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-(1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}d\theta.$$

因为右端当 $x=\pm1$ 时取最大值，所以我們有：

$$|X_n(x)|\leqslant 1\qquad(-1\leqslant x\leqslant+1).\tag{86}$$

但也可得出在所考虑区間的內部的更精确的界。即是，利用不等式

$$\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}\qquad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\qquad 与\qquad 1-u\leqslant e^{-u},$$

可进一步写出：

$$|X_n(x)|<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(1-x^2)\cdot\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right]^{\frac{n}{2}}d\theta<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-(1-x^2)\frac{2\theta^2 n}{\pi^2}}d\theta;$$

作代换 $\theta=\dfrac{\pi\psi}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$，并把上限换作記号 ∞，我們将有：

$$|X_n(x)|<\sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}}\int_0^{\infty}e^{-\psi^2}d\psi=\frac{A}{\sqrt{n(1-x^2)}},\tag{87}$$

其中已令

$$A=\sqrt{2}\int_0^{\infty}e^{-\psi^2}d\psi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

基于关系式(70)，从不等式(87)可立即断定

$$|\hat{X}_n(x)| < \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{87'}$$

其中 B 是一与 n 無关的常数。

35. 雅谷比多項式[1] 雅谷比多項式由下面的公式定义：

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,$$

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!\,2^n}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}]$$

$$(n=1,2,3,\cdots), \tag{88}$$

这推广了勒讓德多項式的罗德立克公式。参数 α 与 β 是滿足条件

$$\alpha>-1,\quad \beta>-1 \tag{89}$$

的实数。特别，当 $\alpha=\beta=0$ 时，雅谷比多項式就变成了勒讓德多項式

$$J_n^{(0,0)}(x)=X_n(x).$$

把公式(88)写出来，我們得到[2]：

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,$$

$$J_1^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}[(\alpha+1)(x+1)+(\beta+1)(x-1)],$$

$$J_2^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{8}[(\alpha+1)(\alpha+2)(x+1)^2+$$

$$+2(\alpha+2)(\beta+2)(x+1)(x-1)+(\beta+1)(\beta+2)(x-1)^2],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般，

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-m+1)}\,\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+m+1)}(x+1)^m(x-1)^{n-m}. \tag{90}$$

如果令

$$p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \tag{91}$$

那么多項式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 也可改写为

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{1}{p(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n p(x)]. \tag{92}$$

---

1) C. G. J. Jacobi [1].

2) 在本节中要利用 Γ("干瑪")函数的性質(例如，参看 Г. М. Фихтенгольц 著，徐献瑜等譯：微积分学教程，第二卷第三分册，第十四章，§5)。

以后，在記号 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 中，我們将略去标号 (α,β)。我們来論証下列等式为真：

$$\int_{-1}^{+1} J_i(x)J_k(x)p(x)dx=0 \qquad (i\neq k,\quad i,k=0,1,2,\cdots) \tag{93}$$

与

$$\int_{-1}^{+1} J_n^2(x)p(x)dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

$$(n=0,1,2,\cdots). \tag{94}$$

設 $m\leqslant n$，那么用分部积分法便得：

$$n!\,2^n\int_{-1}^{+1} J_m(x)J_n(x)p(x)dx=\int_{-1}^{+1} J_m(x)\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n p(x)]dx=$$

$$=J_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)p(x)]\Big|_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{+1} J_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)^n p(x)]dx=$$

$$=-\int_{-1}^{+1} J_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2-1)^n p(x)]dx=\cdots=$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{+1} J_m^{(n)}(x)[(x^2-1)^n p(x)]dx. \tag{95}$$

如 $m<n$，那么导数 $J_m^{(n)}(x)$ 恒等于零，于是得(93)。現設 $m=n$。那么 $J_n^{(m)}(x)$ 为一常数，因

$$J_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\cdots(\alpha+\beta+n+1)[x^n+\cdots]=$$

$$=\frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}[x^n+\cdots], \tag{95'}$$

从而

$$J_n^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

另一方面，作代换 $x=2u-1$ 可得：

$$(-1)^n\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n p(x)dx=\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx=$$

$$=2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_0^1(1-u)^{\alpha+n}u^{\beta+n}du=2^{\alpha+\beta+2n+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

因此，公式(95)便作下列形状：

$$n!\,2^n\int_{-1}^{+1}J_n^2(x)p(x)\,dx=\frac{1}{2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\cdot 2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

由此便得(94)。

应当注意，公式(93)与(94)左端的积分只在$\alpha,\beta>-1$时才有意义；所以对于所述理論来說，这两等式的被滿足非常重要。

用适当的方式把雅谷比多項式正规化，我們便得正交的雅谷比多項式系，其权由公式(91)确定(在$\alpha,\beta>-1$时)：

$$\int_{-1}^{+1}\hat{J}_i^{(\alpha,\beta)}(x)\hat{J}_k^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,2,\cdots),$$

且

$$\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}J_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

函数按雅谷比多項式展开的形状为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_n\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

其中

$$k_n=\int_{-1}^{+1}f(x)\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

或者

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{96}$$

其中

$$a_n=\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\int_{-1}^{+1}f(x)J_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$$
$$(n=0,1,2,\cdots).$$

附注 当$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$时，雅谷比权(91)就成为契比謝夫权$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 因为权唯一地确定正交多項式，所以我們得到契比謝夫多項式的一种新表示法：

$$\hat{T}_n(x)=\hat{J}_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)=\sqrt{2n}\cdot\frac{\sqrt{n!\,(n-1)!}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}J_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}\sqrt{x^2-1}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}][1],$$

所以

---

1) 需注意 $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\sqrt{\pi}$.

$$T_n(x)=\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}\sqrt{x^2-1}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\right]\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{97}$$

类似地，

$$\widehat{U}_n(x)=\widehat{J}_n^{(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})}(x),$$

所以

$$U_n(x)=\frac{2^n\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\right]\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{98}$$

不难推广希莱弗里积分到雅谷比多項式的情况：

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{1}{2^n}\,\frac{(z-1)^{\alpha+n}(z+1)^{\beta+n}}{(z-x)^{n+1}}dz,\tag{99}$$

其中閉路 (C) 必須圍着点 x，但点 $+1$ 与 -1 必須位于閉路之外；只有如此才可以应用哥西定理。

現在就能作出雅谷比多項式的母函数了，即：

$$\begin{aligned}G(t,x)&=\sum_{n=0}^{\infty}J_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n=\\&=\frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z^2-1}{2(z-x)}\,t\right]^n dz^{1)}=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\left(\frac{z-1}{x-1}\right)^{\alpha}\left(\frac{z+1}{x+1}\right)^{\beta}\frac{dz}{z-x-(z^2-1)\frac{t}{2}}.\end{aligned}\tag{100}$$

积分号內变数 z 的函数除有临界点 ±1 外，还有两个極点：

$$z_1=\frac{1}{t}\left(1+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)\qquad与\qquad z_2=\frac{1}{t}\left(1-\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{\,2)}.$$

因为

$$\lim_{t\to0}z_1=\infty,\qquad\lim_{t\to0}z_2=x,$$

所以对充分小的值 t，極点 z_2 無疑位于閉路 (C) 的內部，而極点 z_1 位于它的外部。所以对于充分小的值 t，(100) 右端的积分等于被积函数对应于極点 $z=z_2$ 处的殘数。但这一殘数等于函数

$$\left(\frac{z-1}{x-1}\right)^{\alpha}\left(\frac{z+1}{x+1}\right)^{\beta}\frac{1}{1-tz}$$

1) 当 $|t|<\rho$ 时求和法有效，其中 ρ 是一正数，小于当 z 沿閉路 (C) 运动时 $2\left|\frac{z-x}{z^2-1}\right|$ 的極小值。

2) 根式的值要选得使它当 $t=0$ 时为一。

当 $z=z_2$ 时的值．这样，代入后便得結果：

$$G(t,x)=\frac{(1-t-\sqrt{1-2tx+t^2})^{\alpha}\,(1+t-\sqrt{1-2tx+t^2})^{\beta}}{t^{\alpha+\beta}\sqrt{1-2tx+t^2}\cdot(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}},\qquad(101)$$

也就是(在分子中去掉無理式后)

$$G(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\left(\frac{1-t+\sqrt{1-2tx+t^2}}{2}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1+t+\sqrt{1-2tx+t^2}}{2}\right)^{-\beta}.\qquad(101')$$

借母函数容易得到雅谷比多項式在区間两端点处的值．事实上，

$$G(t,1)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}},$$

$$G(t,-1)=\frac{1}{(1+t)^{\beta+1}},$$

由此得知：

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{1\cdot2\cdots n}=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)},$$

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots n}=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)}\,{}^{1)}.\qquad(102)$$

最后，关于雅谷比多項式的遞推关系式为

$$(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)-$$

$$-\frac{1}{2}(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+(\alpha^2-\beta^2)]\cdot J_n^{(\alpha,\beta)}(x)+$$

$$+(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0.\qquad(103)$$

从母函数 (101′) 推导这一关系式極不方便；較好的办法是認为它的存在事先已經知道[第 32 节公式 (48)]，再选擇系数 α_n 与 β_n 的值；为此，只要利用多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的最高項系数 [参看公式 (95′)]以及这一多項式当 $x=\pm1$ 时的值[参看公式(102)]．

36. 拉格叶尔多項式与厄米特多項式 現在即将考虑的多項式系由下一特性而与前不同，即基本区間为無穷区間，或是半軸 $0<x<\infty$ (拉格叶尔多项式的情况) 甚或是整个軸 $-\infty<x<+\infty$ (厄米特多項式的情况)．这里我們提出这些多項式的某些淺显的性質．

1) 这些結果也可从公式(90)推出．

拉格叶尔多項式系[1] 是在区間 $0<x<\infty$ 中用权

$$p(x)=e^{-x} \tag{104}$$

所定义的。

拉格叶尔多項式可以表作下形

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}). \tag{105}$$

經計算得出：

$$L_0(x)=1,$$
$$L_1(x)=-x+1,$$
$$L_2(x)=x^2-4x+2,$$
$$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,$$
$$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24,$$

一般，

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}C_n^m n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{n!}{k!}x^k. \tag{106}$$

积分关系式

$$\int_0^\infty L_i(x)L_k(x)e^{-x}dx=0 \qquad (i\neq k;\quad i,k=0,1,\cdots) \tag{107}$$

与

$$\int_0^\infty L_n^2(x)e^{-x}dx=(n!)^2 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{108}$$

成立。事实上，設 $m\leqslant n$，那么

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=\int_0^\infty L_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})dx=$$
$$=L_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})\Big|_0^\infty-\int_0^\infty L_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})dx=$$
$$=-\int_0^\infty L_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})dx=\cdots=(-1)^n\int_0^\infty L_m^{(n)}(x)\cdot x^ne^{-x}dx.$$

如果 $m<n$，那么导数 $L_m^{(n)}(x)$ 恒等于零，于是便得 (107)。而如 $m=n$，那么注意到

1) E. Laguerre [1]; П. Л. Чебышев [5].

$$L_n(x)=(-1)^n x^n+\cdots,$$
$$L_n^{(n)}(x)=(-1)^n n!,$$

我們就得到：

$$\int_0^\infty L_n^2(x)e^{-x}dx=n!\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=(n!)^2,$$

也就是等式(108)。

把拉格叶尔多項式正規化便导出正交系

$$\widehat{L}_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}L_n(x) \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{109}$$

已給在正半軸上的函数 $f(x)$ 按拉格叶尔多項式的平方展开式有下列形状：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^\infty k_n\widehat{L}_n(x), \qquad k_n=\int_0^\infty f(x)\widehat{L}_n(x)e^{-x}dx,$$

或者

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^\infty a_nL_n(x), \qquad a_n=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty f(x)L_n(x)e^{-x}dx. \tag{110}$$

正規拉格叶尔多項式 $\widehat{L}_n(x)$ 有母函数

$$G(t,x)=\frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{1+t}. \tag{111}$$

实际上，

$$\sum_{n=0}^\infty \widehat{L}_n(x)t^n=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}L_n(x)t^n=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n(-1)^{n+k}C_n^k\frac{1}{k!}t^nx^k=$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=k}^\infty(-1)^{n+k}C_n^k\cdot\frac{1}{k!}t^nx^k=$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty(-1)^nC_{n+k}^k\frac{1}{k!}t^{n+k}x^k=$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{t^kx^k}{k!}\sum_{n=0}^\infty(-1)^nC_{n+k}^kt^n=\sum_{k=0}^\infty\frac{t^kx^k}{k!}\frac{1}{(1+t)^{k+1}}=\frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{1+t}.$$

作出母函数的对数导数，我們就会有遞推公式

$$(n+1)\widehat{L}_{n+1}(x)+(2n+1-x)\widehat{L}_n(x)+n\widehat{L}_{n-1}(x)=0$$

或

$$L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0. \tag{112}$$

有时也考察由权(当 $\alpha>-1$ 时)

$$p(x)=x^{\alpha}e^{-x} \qquad (0<x<\infty) \tag{113}$$

所定义的广义拉格叶尔多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$[1]，我們提出关于它們的下列公式：

$$L_n^{(\alpha)}(x)=e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}), \tag{114}$$

$$\int_0^{\infty} L_i^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx=0 \qquad (i\neq k;\quad i,k=0,1,2,\cdots), \tag{115}$$

$$\int_0^{\infty}[L_n^{(\alpha)}(x)]^2x^{\alpha}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{116}$$

以及多項式 $(-1)^n\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!}$ 的母函数：

$$\frac{e^{-\frac{tx}{1+t}}}{(1+t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!}t^n. \tag{117}$$

現轉而討論厄米特多項式[2]。它們构成关于权

$$p(x)=e^{-x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{118}$$

的系，而由公式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{119}$$

所确定。特別，

$$H_0(x)=1,$$
$$H_1(x)=2x,$$
$$H_2(x)=4x^2-2,$$
$$H_3(x)=8x^3-12x,$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12.$$

等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_i(x)H_k(x)e^{-x^2}dx=0 \qquad (i\neq k;\quad i,k=0,1,2,\cdots) \tag{120}$$

与

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(x)e^{-x^2}dx=2^n\cdot n!\sqrt{\pi} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{121}$$

成立，所以正規的厄米特多項式系有下列形狀：

---

1) Ю. В. Сохоцкий [1].

2) Ch. Hermite [1]; П. Л. Чебышев [5].

$$\hat{H}_n(x)=\frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n\cdot n!\sqrt{\pi}}}\qquad (n=0,1,2,\cdots).\tag{122}$$

对于多项式 $\frac{H_n(x)}{n!}$，可以指出母函数

$$G(t,x)=e^{-t^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n.\tag{123}$$

实际上，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n=e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=e^{x^2}\cdot e^{-(t-x)^2}=e^{-t^2+2tx},$$

因为最后的和数恰好是函数 $e^{-(t-x)^2}$ 按 t 的幂的展开式。

此外，遞推公式

$$H_{n+1}(x)-2x\,H_n(x)+2n\,H_{n-1}(x)=0\tag{124}$$

为真。H. Я. 索宁[2]也曾考察过权 $p(x)=|x|^{\alpha}e^{-x^2}(\alpha>-1)$ 的情况。

37. 对应于权为 $\int P(x)d\psi(x)$ 的多项式 假定对于区間 (a,b) 与积分权 $\psi(x)$ 的正交多項式系 $\Phi_n(x)(n=0,1,\cdots)$ 为已知，为了有更大的一般性，我們不准备假定多項式为正規的：

$$\int_a^b \Phi_i(x)\Phi_k(x)d\psi(x)=\begin{cases}0, & 当\ i\neq k\\ \sigma_i^2, & 当\ i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,2,\cdots).\tag{125}$$

在这种情况下，对应于积分权

$$\Psi(x)=\int P(x)d\psi(x)^{1)}$$

（其中 $P(x)$ 是在基本区間 (a,b) 内部不为零的正的多項式）的正交系中的多項式，能够非常简单地用多項式 $\Phi_n(x)$ 表示出来。

我們令

$$P(x)=\varepsilon(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_h),$$

其中零点 a_i 假定位于区間 (a,b) 之外或与它的端点相重合，而 ε 表 $+1$ 或 -1 視区間 $b\leqslant x<\infty$ 中实零点的个数为偶数或奇数而定。位于区間 $-\infty<x\leqslant a$ 中的实零点对应于在基本区間中为正的因子 $x-a_i$；至于复零点，它們一对对相互共軛，而对应于它們的因子的积也不能不是正的。

我們还引进新的記号：

1) 这一积分是不定积分，函数 $\Psi(x)$ 除可能相差一常数項外，已被給出。

$$\Phi_n(x_1,x_2,\cdots,x_m) \equiv \begin{vmatrix} \Phi_n(x_1) & \Phi_n(x_2) & \cdots \Phi_n(x_m) \\ \Phi_{n+1}(x_1) & \Phi_{n+1}(x_2) & \cdots \Phi_{n+1}(x_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{n+m-1}(x_1) & \Phi_{n+m-1}(x_2) & \cdots \Phi_{n+m-1}(x_m) \end{vmatrix} \tag{126}$$

$$(m=1,2,\cdots).$$

注意到点 a_i 不可能位于区間(a,b)的內部，我們来求証

$$\Phi_n(a_1,a_2,\cdots,a_h) \neq 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{127}$$

这是在第32节末所述正交多項式 $\Phi_n(x)$ 的下一性質的推广：多項式$\Phi_n(x)$的所有零点位于基本区間的內部。为了証明不等式(127)，我們来考察函数

$$F(x) \equiv \Phi_n(a_1,a_2,\cdots,a_{h-1},x) = \begin{vmatrix} \Phi_n(a_1) & \cdots\Phi_n(a_{h-1}) & \Phi_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{n+h-2}(a_1) & \cdots\Phi_{n+h-2}(a_{h-1}) & \Phi_{n+h-2}(x) \\ \Phi_{n+h-1}(a_1) & \cdots\Phi_{n+h-1}(a_{h-1}) & \Phi_{n+h-1}(x) \end{vmatrix}.$$

因为函数 $F(x)$ 是 $n+h-1$ 次多項式，所以它不可能在多于 $n+h-1$ 个点处为零。但在区間(a,b)的內部，函数 $F(x)$在不少于 n 个点处为零。設若不然，命

$$\xi_i \qquad (i=1,2,\cdots,m;\quad m<n)$$

是它在区間(a,b)內部的零点，并令

$$R(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\xi_i).$$

于是，注意到 $F(x)$是多項式

$$\Phi_n(x),\Phi_{n+1}(x),\cdots,\Phi_{n+h-1}(x)$$

的綫性組合，并注意到不論多項式 $P(x)$是次数小于k的怎样的多項式，等式

$$\int_a^b \Phi_k(x)P(x)d\psi(x)=0$$

为真，我們便得出結論：

$$\int_a^b F(x)R(x)d\psi(x)=0.$$

但最后这一等式是不对的，因为乘积 $F(x)R(x)$ 在基本区間中保持同一符号。另一方面，显然 $F(x)$有 $h-1$ 个零点 $a_i(i=1,2,\cdots,h-1)$ 在基本区間的外面。由此可見，如 x 是不在区間 (a,b) 內部的、且异于 $h-1$ 个上述零点 $a_i(i=1,2,\cdots,h-1)$ 的任一点，函数 $F(x)$在該点处必不为零；特別，$F(a_h)\neq 0$，由此便得不等式(127)。

現在我們来考察由下列等式所确定的多項式系 $\theta_n(x)$：

$$\Theta_n(x)=\frac{\Phi_n(a_1,a_2,\cdots,a_h,x)}{P(x)}\qquad(n=0,1,2,\cdots). \tag{128}$$

由于

$$\Phi_n(a_1,a_2,\cdots,a_h,x)$$

是 $n+h$ 次多項式，在其零点中有 h 个点是多項式 $P(x)$ 的零点，所以显然 $\Theta_n(x)$ 是 n 次多項式.

假定 $m\leqslant n$，我們来計算积分：

$$\int_a^b\Theta_m(x)\Theta_n(x)P(x)\,d\psi(x)=\int_a^b\Theta_m(x)\Phi_n(a_1,\cdots,a_h,x)d\psi(x).$$

如 $m<n$，那么因 $\Phi_n(a_1,\cdots,a_h,x)$ 是多項式 $\Phi_k(x)$ $(k=n,n+1,\cdots,n+h)$ 的綫性組合，所以所考慮的积分为零. 而如 $m=n$，那么在积分时，从这一綫性組合的所有各項除掉含 $\Phi_n(x)$ 的一項外，都得到零，所以我們有：

$$\int_a^b\Theta_n^2(x)P(x)d\psi(x)=(-1)^h\Phi_{n+1}(a_1,\cdots,a_h)\int_a^b\Theta_n(x)\Phi_n(x)d\psi(x).$$

另一方面，如把多項式 $\Theta_n(x)$ 以 x 的冪排起来，那么在上列最后一积分中，所有的項除掉最高次項外都消失了. 因为

$$\Theta_n(x)=\varepsilon\Phi_n(a_1,\cdots,a_h)\delta_{n+h}x^n+\cdots=\varepsilon\Phi_n(a_1,\cdots,a_h)\frac{\delta_{n+h}}{\delta_n}\Phi_n(x)+\cdots,$$

其中 δ_m[1]表示多項式

$$\Phi_m(x)\qquad(m=0,1,2\cdots)$$

的最高次項系数，而后面的点子表示略去的次数低于n的各多項式，所以我們得到等式

$$\int_a^b\Theta_n^2(x)P(x)d\psi(x)=(-1)^h\varepsilon\Phi_n(a_1,\cdots,a_h)\Phi_{n+1}(a_1,\cdots,a_h)\frac{\delta_{n+h}}{\delta_n}\sigma_n^2. \tag{129}$$

因为上一等式左端为正，所以右端也为正.

引进新的正交多項式 $\hat\Theta_n(x)$：

$$\hat\Theta_n(x)=\frac{\Theta_n(x)}{\pm\sqrt{(-1)^h\varepsilon\Phi_n(a_1,\cdots,a_h)\Phi_{n+1}(a_1,\cdots,a_h)\frac{\delta_{n+h}}{\delta_n}\sigma_n^2}}\text{[2]}, \tag{128'}$$

我們便得关于积分权 $\int P(x)d\psi(x)$ 的正交多項式系 $\hat\Theta_n(x)$.

$$\int_a^b\hat\Theta_i(x)\hat\Theta_k(x)P(x)d\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases}\qquad(i,k=0,1,2,\cdots). \tag{130}$$

---

1) 由第 32 节可知，在任意权 $\psi(x)$ 之下，$\Phi_n(x)$ 是正規多項式时，δ_n 的大小可由下列公式算出来：

$$\delta_n=\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}}\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

2) 我們要选擇根号前的符号，使得多項式 $\hat\Theta_n(x)$ 中 x^n 的系数为正.

附注　在上面的叙述中，我們假設了所有点 a_i 彼此相异．但也容易引进多项式 $P(x)$ 有重根的情况：这时在代替

$$\Phi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的行列式的对应各列中就会出現多项式 $\Phi_n(x)$ 的导数．

例 1.　多项式 $U_n(x)$ 可以通过多项式 $T_n(x)$ 来表达．实际上，令

$$d\psi(x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\qquad h=2;\qquad a_1=+1,\qquad a_2=-1;\qquad P(x)=1-x^2,$$

由公式(128)我們便得：

$$\theta_n(x)=\frac{1}{1-x^2}\begin{vmatrix}T_n(1) & T_n(-1) & T_n(x)\\ T_{n+1}(1) & T_{n+1}(-1) & T_{n+1}(x)\\ T_{n+2}(1) & T_{n+2}(-1) & T_{n+2}(x)\end{vmatrix}=(-1)^n 2\,\frac{T_n(x)-T_{n+2}(x)}{1-x^2}.$$

为了确定 $U_n(x)$ 与 $\theta_n(x)$ 相差的常数因子，最簡便的方法是比較最高次项系数．我們将有：

$$U_n(x)=\frac{1}{2}\,\frac{T_n(x)-T_{n+2}(x)}{1-x^2}.$$

例 2.　試对区間 $(-1, +1)$ 作出关于权

$$p(x)=x-a\qquad (a\geq 1)$$

的正交多项式系 $\theta_n(x)$．

这些多项式除去常数因子外由下列等式确定：

$$\theta_n(x)=\frac{1}{x-a}\begin{vmatrix}X_n(a) & X_n(x)\\ X_{n+1}(a) & X_{n+1}(x)\end{vmatrix}=\frac{X_n(a)X_{n+1}(x)-X_{n+1}(a)X_n(x)}{x-a}.$$

特别，当 $a=1$ 时：

$$\theta_n(x)=\frac{X_{n+1}(x)-X_n(x)}{x-1}.$$

例 3.　試对同一区間求作对应于微分权

$$p(x)=1+x^2$$

的多项式系 $\theta_n(x)$．我們必須从勒讓德多项式系出發，令

$$d\psi(x)=dx;\qquad h=2;\qquad a_1=+i,\qquad a_2=-i;\qquad P(x)=1+x^2.$$

按公式(128)，多项式 $\theta_n(x)$ 有下列形状：

$$\theta_n(x)=\frac{1}{1+x^2}\begin{vmatrix}X_n(i) & X_n(-i) & X_n(x)\\ X_{n+1}(i) & X_{n+1}(-i) & X_{n+1}(x)\\ X_{n+2}(i) & X_{n+2}(-i) & X_{n+2}(x)\end{vmatrix}.$$

应用拉普拉斯公式(73)，就得到(不計常数因子)：

$$\theta_n(x)=\frac{I_{n+2}X_n(x)+I_nX_{n+2}(x)}{x^2+1},$$

其中已令

$$I_n=\int_0^{\pi}(1+\sqrt{2}\cos\varphi)^n d\varphi \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

再只要把 $\Theta_n(x)$ 正規化就行了.

38. 周期函数用三角多項式的平方逼近 如已給在整个实軸 $-\infty<x<+\infty$ 上的函数 $f(x)$ 有周期 2π,则希望逼近它时,自然地就会从三角多項式

$$T_n(x)=a_0+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \tag{131}$$

出發. 設 $\psi(x)$ 是已給在周期中的 $(-\pi\leqslant x\leqslant+\pi)$ 不減函数; 把它視作积分权,我們提出使积分

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}[T_n(x)-f(x)]^2 d\psi(x) \tag{132}$$

为極小的問題. 因为函数

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=\cos x,\qquad \varphi_2(x)=\sin x,$$
$$\varphi_3(x)=\cos 2x,\qquad \varphi_4(x)=\sin 2x$$

等等形成一綫性無关系, 故如第 31 节中所述理論所示, 可用唯一的方式选擇三角多項式系

$$\Phi_0(x),\Phi_1(x),\Phi_2(x),\cdots,$$

使它們在周期 $(-\pi,+\pi)$ 中关于权 $\psi(x)$ 正交:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi_i(x)\Phi_j(x)\,d\psi(x)=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j,\\ 1, & 当\ i=j,\end{cases}$$

其中 $\Phi_{2k-1}(x)$ 为 k 次三角多項式,有含 $\cos kx$ 并且系数为正的項,沒有含 $\sin kx$ 的項; 而 $\Phi_{2k}(x)$ 亦为 k 次三角多項式,它有含 $\sin kx$ 并且系数为正的項, 但亦可有含 $\cos kx$ 的項.

如果只要 $\Phi_{2k-1}(x)$ 与 $\Phi_{2k}(x)$ 是 k 次的, 則不用 $\Phi_{2k-1}(x)$ 与 $\Phi_{2k}(x)$, 而可以引进多項式

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{2k-1}^*(x)&=\Phi_{2k-1}(x)\cos\lambda_k-\Phi_{2k}(x)\sin\lambda_k,\\ \Phi_{2k}^*(x)&=\Phi_{2k-1}(x)\sin\lambda_k+\Phi_{2k}(x)\cos\lambda_k,\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

其中 λ_k 是完全任意的数 $(k=1,2,3,\cdots)$.

像这样作好系 $\Phi_n(x)$ 后, 就容易作出逼近已知函数 $f(x)$ 的 n 次多項式 $T_n(x)$: 这一多項式可作为展开式

$$f(x)\sim A_0+\sum_{k=1}^{\infty}[A_{2k-1}\Phi_{2k-1}(x)+A_{2k}\Phi_{2k}(x)]$$

的前 $n+1$ 項之和而获得，其中已令

$$A_k=\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\Phi_k(x)d\psi(x).$$

巴塞伐公式成立：

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)d\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\Phi_k(x)d\psi(x)\right]^2,$$

且平方誤差

$$\mu_n=\min\int_{-\pi}^{+\pi}[T_n(x)-f(x)]^2d\psi(x)$$

当 n 無限增加时趋近于零[由維尔斯特拉斯定理 2 (第 21 节与第 26 节)].

例 1. 在常数微分权

$$p(x)=\psi'(x)=1$$

之下，可得最簡单的正交三角多項式系. 这一系有下列形状：

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\qquad \Phi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,$$

$$\Phi_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\qquad \Phi_4(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x$$

等等. 但也可以令

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x-\lambda_1),\qquad \Phi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x-\lambda_1),$$

$$\Phi_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2(x-\lambda_2),\qquad \Phi_4(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2(x-\lambda_2)$$

等等，其中 λ_k 是任意的.

不論怎样，我們得到傅立叶級数：

$$f(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),\tag{134}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx dx,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx,\tag{135}$$

級数的前 $2n+1$ 項的和就給出所求的逼近.

例 2. 上述理論也包括着下一情况：逼近多項式 $T_n(x)$ 不是使积分为極小而必須使和数

$$\sum=\sum_{k=1}^{m}[T_n(x_k)-f(x_k)]^2p_k\qquad (m>2n+1)$$

为極小，这时权 $\psi(x)$ 是"阶梯的".

譬如，設 $p_k=1$, $x_k=\frac{2\pi k}{m}$，所以和数 $\sum$ 为

$$\Sigma=\sum_{k=0}^{m-1}\left[T_n\left(\frac{2\pi k}{m}\right)-f\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right]^2.$$

容易断定，在这一情况下，正交多项式系仍只与傅立叶系相差一常数因子．这可由下列关系式推出：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\cos px_k\cos qx_k=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q,\\ \dfrac{m}{2}, & \text{当 } p=q,\end{cases}\\ &\sum_{k=0}^{m-1}\sin px_k\sin qx_k=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q,\\ \dfrac{m}{2}, & \text{当 } p=q,\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{136}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos px_k\sin qx_k=0,\tag{137}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos px_k=0,\qquad \sum_{k=0}^{m-1}\sin px_k=0,\qquad \sum_{k=0}^{m-1}1=m.\tag{138}$$

要証明公式(138)，我們注意

$$\sum_{k=0}^{m-1}e^{ipx_k}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2\pi ip}{m}}\right)^k=\frac{1-e^{2\pi ip}}{1-e^{\frac{2\pi ip}{m}}}=0,$$

然后只消分开实部与虚部就行了．和数(136)中的第一个可改写如下：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos px_k\cos qx_k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}[\cos(p-q)x_k+\cos(p+q)x_k]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\cos(p-q)x_k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\cos(p+q)x_k,$$

按照(138)，这就很清楚：当 $p\neq q$ 时它为零；而如 $p=q$，那么上一等式右端第一个和数为 $\frac{m}{2}$，第二个为零，对(136)中的第二个和数以及和数(137)都有类似的結果．

这样，我們的極值問題中的正交系由下列函数构成：

$$\frac{1}{\sqrt{m}},\ \sqrt{\frac{2}{m}}\cos x,\ \sqrt{\frac{2}{m}}\cos 2x,\cdots,$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{m}}\sin 2x,\cdots.$$

正交化的插补公式为

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu\cos\nu x+B_\nu\sin\nu x),\tag{139}$$

其中已令

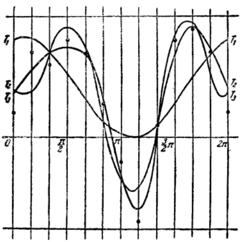


圖 21

$$A_\nu=\frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\cos \nu x_k,$$

$$B_\nu=\frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\sin \nu x_k.$$

当 $m=2n+1$ 时，便得通常的三角插补式（参看第 9 节例 4），不过是按照倍角的正弦与余弦来排列的．当 m 無限增加而 n 为常数时，此插补公式成为傅立叶級数的有限和．

公式(139)在实際运用时很方便．

例 3. 試取一次、二次与三次的三角多項式使与一周期函数 $f(x)$ 相符，这个函数在 $m=12$ 个接續坐标 $x_k=\frac{k\pi}{6}$ $(0\leqslant k\leqslant 11)$ 处之值为

$$2,7,6,8,7,3,-2,-7,1,8,9,7$$

(圖 21)．

由簡单的計算便可得各系数的数值：

$$A_0=\frac{49}{6},\qquad A_1=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3},\qquad A_2=-\frac{15}{4},\qquad A_3=-\frac{1}{2},$$

$$B_1=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\sqrt{3},\qquad B_2=-\frac{19}{12}\sqrt{3},\qquad B_3=\frac{5}{3}.$$

因此：

$$T_1(x)=\frac{49}{12}+\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos x+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\sin x,$$

$$T_2(x)=\frac{49}{12}+\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos x+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\sin x-\frac{15}{4}\cos 2x-\frac{19}{12}\sqrt{3}\sin 2x,$$

$$T_3(x)=\frac{49}{12}+\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos x+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\sin x-\frac{15}{4}\cos 2x-\frac{19}{12}\sqrt{3}\sin 2x-$$
$$-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{5}{3}\sin 3x.$$

例 4. 把第 37 节中所述对通常多项式所用的方法搬过来，可以在給出形如

$$\Psi(x)=\int T(x)d\psi(x)$$

的权时作出正交三角多项式系，其中 $T(x)$ 是非負的三角多項式.

譬如，設

$$\psi'(x)=1 \qquad 与 \qquad T(x)=\sin^2\frac{x}{2},$$

所以

$$p(x)=\Psi'(x)=\sin^2\frac{x}{2}.$$

于是，为了要得到关于权 $p(x)$ 的正交多项式系 $\Theta_n(x)\ (n=0,1,2,\cdots)$，只須把多項式

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_0=1, \qquad \Theta_{2k-1}(x)=\frac{\cos kx-\cos(k+1)x}{\sin^2\frac{x}{2}},\\ &\Theta_{2k}(x)=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{\sin^2\frac{x}{2}}\end{aligned}\right\}\quad (k=1,2,\cdots)$$

正規化即可[1]．

39. 高斯-克利斯托費尔机械求积公式 我們回过来考慮通常的多项式，以便熟悉应用正交多項式理論来进行近似积分法或一般地計算已知函数的綫性泛函数.

設所考察的泛函数为

$$U(f)\equiv\int_a^b f(x)d\psi(x), \tag{140}$$

其中 $\psi(x)$ 与通常一样是区間 (a,b) 中的不减函数.

設 $f(x)$ 是一次数不超过 $n-1$ 的多項式，那么拉格朗習插补公式恒等地成立：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{A(x)}{(x-x_i)A'(x_i)}, \tag{141}$$

其中 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是插补基点，而

$$A(x)\equiv C(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{142}$$

从公式(141)应得

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{143}$$

1) 必須考慮到在第 173 頁上的脚注 2) 中所作的說明.

其中

$$A_i=\int_a^b \frac{A(x)d\psi(x)}{(x-x_i)A'(x_i)}.$$

如果$f(x)$是次数大于或等于n的多項式，或者不是多項式，那么公式(141)不再适合而要引进一个余項(参看第20节)。

但是可以选擇基点x_m $(m=1,2,\cdots,n)$，使得等式(143)在$f(x)$为次数不大于$2n-1$的多項式的一切情况下总是成立。

我們立刻就会看到，为此只要选擇关于权$\psi(x)$的正交多項式$\Phi_n(x)$的零点作为基点就行了，亦即令$A(x)\equiv\Phi_n(x)$。把$\Phi_n(x)$的零点(和第32节中一样)記作

$$x_i^{(n)}\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

可以把公式(141)重写为下列形状：

$$f(x)=\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})\cdot\frac{\Phi_n(x)-\Phi_n(x_i^{(n)})}{(x-x_i^{(n)})\Phi_n'(x_i^{(n)})},$$

于是得到：

$$\int_a^b f(x)d\psi(x)=\sum_{i=1}^n A_i^{(n)}f(x_i^{(n)}), \tag{144}$$

其中

$$A_i^{(n)}=\frac{1}{\Phi_n'(x_i^{(n)})}\int_a^b\frac{\Phi_n(x)-\Phi_n(x_i^{(n)})}{x-x_i^{(n)}}d\psi(x)\qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{145}$$

現在假設$f(x)$是一个次数不大于$2n-1$的多項式。于是可以写：

$$f(x)-\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})\frac{\Phi_n(x)-\Phi_n(x_i^{(n)})}{(x-x_i^{(n)})\Phi_n'(x_i^{(n)})}\equiv\Phi_n(x)\cdot S(x), \tag{146}$$

其中$S(x)$是一个次数不大于$n-1$的多項式。事实上，等式(146)的左端是一个次数不大于$2n-1$的多項式，它当$x=x_i^{(n)}(i=1,2,\cdots,n)$时为零，因而能被$\Phi_n(x)$所整除。

为了要肯定公式(144)成立，只要把(146)积分起来，并注意积分

$$\int_a^b\Phi_n(x)S(x)d\psi(x)$$

等于零。

公式(144)是克利斯托費尔給出的普遍形状[1)]。

例 1. 如果微分权是常数，那么对任一个次数小于$2n$的多項式$f(x)$，公式

1) E. Christoffel [1].

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

为真，其中已令

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{X_n'(x_i^{(n)})} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x) - X_n(x_i^{(n)})}{x - x_i^{(n)}}\,dx,$$

且 $X_n(x)$ 是 n 次勒讓德多项式，而 $x_i^{(n)}(i=1, 2, \cdots, n)$ 为其零点.

在这一特别情况下的公式是高斯指出的[1]，他并曾算出在 $n \leqslant 7$ 时系数 $A_i^{(n)}$ 的值. 例如，

$$A_1^{(1)} = 1,$$

$$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = \frac{1}{2},$$

$$A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = \frac{5}{18}, \qquad A_2^{(3)} = \frac{4}{9}.$$

例 2. 在微分权 $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 之下，同样求得：

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right),$$

当 $f(x)$ 为次数小于 $2n$ 的多項式时，这公式正确（参看第 20 节例 3）.

例 3. 在关于 $f(x)$ 的同一假設下，等式

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

成立，其中

$$A_i^{(n)} = \frac{1}{L_n'(x_i^{(n)})} \int_0^{\infty} \frac{L_n(x) - L_n(x_0^{(n)})}{x - x_i^{(n)}} e^{-x} dx,$$

$L_n(x)$ 是 n 次拉格叶尔多项式，$x_i^{(n)}$ 是它的零点.

在克利斯托費尔公式(144)中，令函数 $f(x)$ 恒等于 1，我們得知**克利斯托費尔系数 $A_i^{(n)}$ 的和等于权的全变差**：

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} = \int_a^b d\psi(x). \tag{147}$$

另一方面，在同一公式中令

$$f(x) = \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x - x_m^{(n)})\Phi_n'(x_m^{(n)})}\right]^2,$$

我們便得出結論：

$$A_m^{(n)} = \int_a^b \left[\frac{\Phi_n(x)}{(x - x_m^{(n)})\Phi_n'(x_m^{(n)})}\right]^2 d\psi(x),$$

1) C. F. Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi ("Werke", III).

又因右端显然为正，由此可見，所有克利斯托費尔系数为正：

$$A_m^{(n)}>0 \qquad (m=1,2,\cdots,n;\quad n=1,2,\cdots). \tag{148}$$

40. 克利斯托費尔-达布公式 在第 32 节中已經建立了关于权 $\psi(x)$ 的正交系中多項式所滿足的遞推关系式：

$$\alpha_{m+1}\Phi_{m+1}(x)-(x+\beta_m)\Phi_m(x)+\alpha_m\Phi_{m-1}(x)=0.$$

可以把它写成下列形状：

$$x\Phi_m(x)=\alpha_{m+1}\Phi_{m+1}(x)-\beta_m\Phi_m(x)+\alpha_m\Phi_{m-1}(x). \tag{149}$$

把 x 換作 y：

$$y\Phi_m(y)=\alpha_{m+1}\Phi_{m+1}(y)-\beta_m\Phi_m(y)+\alpha_m\Phi_{m-1}(y). \tag{150}$$

把等式(149)乘上 $\Phi_m(y)$，并把等式(150)乘上 $\Phi_m(x)$，再相减，得：

$$(x-y)\Phi_m(x)\Phi_m(y)=\alpha_{m+1}[\Phi_{m+1}(x)\Phi_m(y)-\Phi_m(x)\Phi_{m+1}(y)]-$$
$$-\alpha_m[\Phi_m(x)\Phi_{m-1}(y)-\Phi_{m-1}(x)\Phi_m(y)].$$

然后把最后一等式对于 m 从 1 加到 n，并加上显明的等式

$$(x-y)\Phi_0(x)\Phi_0(y)=\alpha_1[\Phi_1(x)\Phi_0(y)-\Phi_0(x)\Phi_1(y)];$$

于是就会有：

$$(x-y)\sum_{m=0}^{n}\Phi_m(x)\Phi_m(y)=\alpha_{n+1}[\Phi_{n+1}(x)\Phi_n(y)-\Phi_n(x)\Phi_{n+1}(y)],$$

或即

$$K_n(x,y)=\alpha_{n+1}\frac{\Phi_{n+1}(x)\Phi_n(y)-\Phi_n(x)\Phi_{n+1}(y)}{x-y}, \tag{151}$$

其中引用了記号：

$$K_n(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\Phi_m(x)\Phi_m(y). \tag{152}$$

公式(151)称作**克利斯托費尔-达布公式**[1]。

在已知区間 (a,b) 中，构成函数 $f(x)$ 关于权 $\psi(x)$ 的平方逼近的 n 次多項式[現在我們把它記作 $f_n(x)$]，可用所导得的公式来表示，像这样做很是方便。

我們知道，这一多項式的形状为

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{n}k_m\Phi_m(x),$$

其中

1) П. Л. Чебышев [1] 早有过这一公式。

$$k_m=\int_a^b f(y)\Phi_m(y)d\psi(y).$$

由此可見，

$$f_n(x)=\int_a^b f(y)\sum_{m=0}^{n}\Phi_m(x)\Phi_n(y)d\psi(y)=\int_a^b K_n(x,y)f(y)d\psi(y). \quad (153)$$

但注意到克利斯托費尔-达布公式(151)，我們又得：

$$f_n(x)=\alpha_{n+1}\int_a^b \frac{\Phi_{n+1}(x)\Phi_n(y)-\Phi_n(x)\Phi_{n+1}(y)}{x-y}f(y)d\psi(y)$$

$$(n=0,1,2,\cdots). \quad (154)$$

回想数 α_n 在第 32 节中已用等式

$$\alpha_n=\frac{\sqrt{C_{n-1}C_{n+1}}}{C_n} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

确定，而 C_n 是由方冪

$$x^m \qquad (m=0,1,\cdots,n-1)$$

在权 $\psi(x)$ 之下的格拉姆行列式所确定：

$$C_n=G(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})=\begin{vmatrix} c_0 & c_1\cdots c_{n-1}\\ c_1 & c_2\cdots c_n\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ c_{n-1} & c_n\cdots c_{2n-2}\end{vmatrix},$$

$$c_n=\int_a^b x^n d\psi(x) \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

同时 α_n 又是多項式 $\Phi_{n-1}(x)$ 与 $\Phi_n(x)$ 最高次項系数的比。

例 1. 考察契比謝夫多項式的特殊情况. 因为正規契比謝夫多項式

$$\widehat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\cos n\arccos x \qquad (n\geqslant 1)$$

有最高次項系数 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2^{n-1}$ (除了 $\widehat{T}_0(x)$ 外，它恒等于 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$)，故对所考察的情况，

$$\alpha_n=\frac{1}{2} \qquad (n\geqslant 2).$$

因此，达布公式有下列形状：

$$f_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{T_{n+1}(x)T_n(y)-T_n(x)T_{n+1}(y)}{x-y}f(y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (n\geqslant 1). \quad (155)$$

例 2. 在勒讓德多項式的情况下，我們有：

$$\widehat{X}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}X_n(x),$$

于是多項式 $\widehat{X}_n(x)$ 的最高次項系数等于

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}.$$

所以,

$$a_n=\frac{n}{2\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}},$$

而达布公式有下列形状:

$$f_n(x)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2-\frac{1}{4}}}\int_{-1}^{+1}\frac{\widehat{X}_{n+1}(x)\widehat{X}_n(y)-\widehat{X}_n(x)\widehat{X}_{n+1}(y)}{x-y}f(y)dy \tag{156}$$

或者

$$f_n(x)=\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{X_{n+1}(x)X_n(y)-X_n(x)X_{n+1}(y)}{x-y}f(y)dy. \tag{156'}$$

例 3. 我們没有推导过三角多項式情况下的遞推关系式,因而就不可能写出达布公式. 但在常数权情况下,一点也不难得出相仿的公式;此时,如我們所看到的(第 38 节例 1),平方展开式与傅立叶級数一致,亦即我們有:

$$K_{2n+1}(x,y)\equiv\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}(\cos mx\cos my+\sin mx\sin my)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(x-y)\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}},$$

所以

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}}f(y)dy. \tag{157}$$

41. 平方逼近的一致收敛性. 勒貝格不等式及由其导出的推論 如 $\Phi_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 表示在区間 (a,b) 中关于权 $\psi(x)$ 的正交多項式系, 那么已知函数 $f(x)$ 用广义多項式

$$\sum_{m=0}^{n}a_m\Phi_m(x)$$

的平方逼近由下一多項式提供:

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{n} k_m \Phi_m(x),$$

$$k_m=\int_a^b f(x)\Phi_m(x)d\,\psi(x) \qquad (m=0,1,\cdots,n);$$

由积分

$$\mu_n=\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 d\psi(x) \tag{158}$$

所确定的平方誤差当 n 增加时不增加，并且在完备系的情况下，它趋向于零.

但由此能否推得：函数 $f(x)$ 在所考虑的区間中可展开为"广义傅立叶級数"

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} k_m \Phi_m(x),$$

而此級数一致收斂或者至少在普通意义下收斂？換句話說，能否断定函数 $f_n(x)$（級数的部分和）收斂于 $f(x)$？

在一般情况下，亦即对于任意的連續函数 $f(x)$，对提出的問題必須給以否定的答案。設若积分(158)很小，但由此决不能推断差数 $f_n(x)-f(x)$ 的最大模必定很小，甚至还不能推断，对一已知值 x，差数的模本身必定很小[1)]。以后（第 42 节中）将举出一个周期为 2π 的連續函数，其傅立叶展开式發散，縱然这种展开式是所考察的級数范疇的最簡单特殊情况之一.

在連續函数中分离出一些函数类来，使得对于这些函数类，正交多項式（通常的或三角的）的平方逼近不仅在平方意义下收斂，而且也一致收斂，这一問題显得極端重要。这問題旣有理論的价值，也有实用的价值，因为在許多应用中，只有一致收斂有实际的意义；而另一方面，平方逼近联系着非常方便的計算过程.

在以下的叙述中，我們只限于考察正交系的两个特别例子，即：1)傅立叶三角多項式与 2)勒讓德多項式。較完整的結果是齐各得到的，可在他的专著[2)]中找到.

1) 例如，我們令

$$F_n(x)=n^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}.$$

显然，

$$\int_{-1}^{+1} F_n^2(x)dx=\sqrt{n}\int_{-1}^{+1} e^{-n^2x^2}dx<\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} F_n^2(x)dx=0.$$

然而，当 n 無限增加时，$F_n(0)$ 根本不趋向于零；相反，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(0)=\infty.$$

2) G. Szegö[1].

而且这里我們所得的收斂条件只是充分的而不是必要的．同时它們也不就是最后的样子，以后(第 55 节)我們还要回到所提出的問題．

在研究收斂性时，克利斯托費尔-达布公式起着重要作用．

我們从傅立叶級数开始．我們有(参看第 40 节例 3)：

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)K_{2n+1}(x,t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt. \quad (159)$$

如若和数 $f_n(x)$ 一致收斂于連續函数 $f(x)$，那么所有的 $f_n(x)$ 就会一致有界．一般說来，决不能如此断定；但是，如勒貝格所曾指出的[1]，和数 $f_n(x)$（更确切地，它們的極大值）增加得不比 $KM\lg n$ 快，其中 M 是函数 $f(x)$ 的極大值[2]，而 K 是一絕对常数．

实际上，显然，

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt=$$

$$=\frac{M}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\frac{2M}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du.$$

但是借不等式

$$|\sin hu|\leqslant h|\sin u|^{3)}$$

与

$$\sin u\geqslant\frac{2u}{\pi},$$

我們又得：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du=\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du<$$

---

1) H. Lebesgue [1]．在不等式 $|f_n(x)|\leqslant\lambda_n M$ 中，其中 $M=\max|f(x)|$，因子 λ_n 称作"勒貝格常数"．在这里的情况下，

$$\lambda_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{9}}\right|dt.$$

2) 譯者注：这里所謂"極大值"都是指的"模的極大值"．

3) 譯者注：此式当 $h\geqslant1$ 时成立．

$$<\int_0^{\frac{1}{n}}(2n+1)du+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2u}du=2+\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2}\lg\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\lg n. \tag{160}$$

由此便得勒貝格的推断.

在勒讓德多項式系的情况下事情略有不同. 此时可以肯定: 不論正数 δ 怎样小, 永远存在着这样的数 $K\equiv K(\delta)$, 使得对于一切 n 以及区間 $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 中的一切值 x 将有不等式

$$|f_n(x)|<K(\delta)M\lg n \tag{161}$$

成立.

和以前一样,

$$|f_n(x)|\leqslant M\int_{-1}^{+1}|K_n(x,t)|d\psi(t)=\frac{1}{2}M\int_{-1}^{+1}|K_n(x,t)|dt. \tag{162}$$

由第 34 节不等式(87′)推出不等式

$$|\hat{X}_n(x)|\leqslant C \qquad \left(对 -1+\frac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{\delta}{2}\right), \tag{163}$$

其中 C 与 δ 有关, 且

$$\int_{-1}^{+1}|\hat{X}_n(t)|dt<D,$$

其中 D 是一絕对常数. 假定 $n>\frac{2}{\delta}\left(所以 -1+\frac{\delta}{2}<x\pm\frac{1}{n}<1-\frac{\delta}{2}\right)$, 我們把积分

$$I=\int_{-1}^{+1}|K_n(x,t)|dt$$

拆成五个积分

$$\int_{-1}^{+1}=\int_{-1}^{-1+\frac{\delta}{2}}+\int_{-1+\frac{\delta}{2}}^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{1-\frac{\delta}{2}}+\int_{1-\frac{\delta}{2}}^{1}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5. \tag{164}$$

用不等式(162)与(163)以及达布公式, 我們得:

$$I_3=\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}|K_n(x,y)|dy=\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\left|\sum_{m=0}^{n}\hat{X}_m(x)\,\hat{X}_m(y)\right|dy<\frac{2}{n}\cdot(n+1)C^2, \tag{165}$$

$$I_1=\int_{-1}^{-1+\frac{\delta}{2}}|K_n(x,y)|dy=$$

$$=\alpha_{n+1}\int_{-1}^{-1+\frac{\delta}{2}}\frac{|\hat{X}_{n+1}(x)|\cdot|\hat{X}_n(y)|+|\hat{X}_n(x)|\cdot|\hat{X}_{n+1}(y)|}{|x-y|}dy<$$

$$<\alpha_{n+1}\cdot\frac{2CD}{\left(\frac{\delta}{2}\right)}=\frac{4}{\delta}CD\,\alpha_{n+1} \tag{166}$$

(对 I_5 有类似不等式),

$$I_2=\int_{-1+\frac{\delta}{2}}^{x-\frac{1}{n}}|K_n(x,y)|dy=$$

$$=\alpha_{n+1}\int_{-1+\frac{\delta}{2}}^{x-\frac{1}{n}}\frac{|\hat{X}_{n+1}(x)|\cdot|\hat{X}_n(y)|+|\hat{X}_n(x)|\cdot|\hat{X}_{n+1}(y)|}{|x-y|}dy<$$

$$<\alpha_{n+1}2C^2\int_{-1+\frac{\delta}{2}}^{x-\frac{1}{n}}\frac{dy}{x-y}=2\alpha_{n+1}C^2\left[\lg n+\lg\left(x+1-\frac{\delta}{2}\right)\right]<$$

$$<2\alpha_{n+1}C^2(\lg n+\lg 2) \tag{167}$$

(对 I_4 同样)。

比較所有获得的不等式，并注意 $\alpha_n=\frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}$，我們断定不等式(161)成立。

由勒貝格不等式就可提出平方逼近中的一問題：要已知函数可以怎样好地用 n 次多項式来表写时，平方逼近才一致收斂。假設存在着 n 次多項式 $P_n(x)$，使得在所考虑的区間中

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\varepsilon_n. \tag{168}$$

作出对于函数 $f(x)-P_n(x)$ 的平方逼近多項式。不难明白，这将是 $f_n(x)-P_n(x)$，其中 $f_n(x)$ 是对于函数 $f(x)$ 的平方逼近多項式。由勒貝格基本引理，从不等式(168)推出

$$|f_n(x)-P_n(x)|\leqslant K\,\varepsilon_n\lg n. \tag{169}$$

(如果是傅立叶級数，这一不等式对一切值 x 成立；如果是勒讓德級数，它在区間 $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 上成立。)

但由不等式(168)与(169)于是就有：

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n(1+K\lg n)<K'\varepsilon_n\lg n. \tag{170}$$

由此可見，如果可以选取多項式 $P_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n\lg n=0, \tag{171}$$

那么就会有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), \tag{172}$$

且在傅立叶級数的情况下，收斂是到处一致的；而在勒讓德級数的情况下，在任一区

間 $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 中，收斂是一致的，其中 $\delta>0$。

42. 發散傅立叶級数的例子 在前面第 41 节中所表述的、使連續函数能展开为一致收斂的傅立叶（或勒讓德）級数的充分条件指出，連續函数中極广泛的一类具有这一性質。

現在就發生了这样的問題：条件（171）或与其类似的条件必要到怎样的程度呢？能否断言任一連續函数可展开为傅立叶級数呢？

这种假想是不对的。存在着这样的連續函数，其傅立叶級数不在所有的点处收斂。

我們来考察 L. 費叶所举的例子，并利用已为我們所熟知的三角多項式的性質（参看第 27 节）。

費叶函数定义为級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(2^{n^3},x)}{n^2} \tag{173}$$

的和，其中

$$\nu(n,x)=\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos nx}{1}-\frac{\cos(n+1)x}{1}-\cdots-\frac{\cos 2nx}{n}$$
$$(n\geqslant 1). \tag{174}$$

如在第 27 节中所指出的，函数 $\nu(n,x)$ 对 n 与 x 一致有界：

$$|\nu(n,x)|\leqslant\text{const}.$$

所以級数（173）一致收斂，因此表示一連續函数。

現在我們来作函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的傅立叶級数。由于一致收斂性，在計算系数时可以把級数逐項积分。所以在作傅立叶級数前 N 項的和时，在級数（173）的每一項 $\frac{\nu(2^{n^3},x)}{n^2}$ 中只要保留三角多項式的那些 $m\leqslant N$ 的項 $\cos mx$；然后我們代入 $x=0$。我們令 $N=2^{p^3}$。由公式（174）可見，这样得到的和数的任何項不会是負的；特别，由 $\frac{\nu(2^{p^3},x)}{p^2}$ 得出一項：

$$\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{2^{p^3}}+\frac{1}{2^{p^3}-1}+\cdots+\frac{1}{1}\right).$$

这一表达式（这就是傅立叶級数的 2^{p^3} 項的部分和）大于

$$\frac{1}{p^2}\int_1^{2^{p^3}+1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{p^2}\lg(2^{p^3}+1)>p\lg 2;$$

因此，当 p 無限增加时，我們的和趋向無穷大。这样，函数 $f(x)$ 的傅立叶級数在点

$x=0$ 处發散。

分析平方逼近的級数的發散現象时，还能建立下面的非常普遍的命題。

我們来比較已知函数 $f(x)$（連續于基本区間中）与由关系式

$$P_n(f;x)=\int K_n(x,t)f(t)d\psi(t) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

所給出的函数序列 $P_n(f;x)$，其中积分是取在基本区間上的，函数 $\psi(t)$ 永远給出在这区間上，最后，函数 $K_n(x,t)$ 給出在变数 x 与 t 对应于基本区間的那些値处（且設为連續）。还假設数

$$\omega_n=\int|K_n(x^*,t)|d\psi(t)$$

（其中 x^* 是基本区間中 x 的某一固定値）無上界。那么可选取函数 $f(x)$，使序列 $P_n(f;x^*)$ 为發散的[1]。

因为数 ω_n 無上界，故存在着子序列 $\omega_{p_n}(p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{p_n}=\infty.$$

設函数 $\lambda_n(t)$ 由等式

$$\lambda_n(t)=\operatorname{sgn} K_n(x^*,t) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

所定义，那么

$$\omega_n=\int K_n(x^*,t)\lambda_n(t)d\psi(t).$$

显然，函数 $\lambda_n(t)$ 在 $K_n(x^*,t)$ 改变符号的点处有跳躍；但是，当然可以寻出一函数 $\Lambda_n(t)$，連續而且具有这样的性質：

$$|\Lambda_n(t)|\leqslant 1, \qquad \int[\Lambda_n(t)-\lambda_n(t)]^2d\psi(t)<\delta_n,$$

其中 δ_n 是事先已給的正数[2]。于是我們将有（利用布尼亚可夫斯基不等式）[3]，

$$\left|\int K_n(x^*,t)\Lambda_n(t)d\psi(t)\right|=$$
$$=\left|\int K_n(x^*,t)\lambda_n(t)d\psi(t)-\int K_n(x^*,t)[\lambda_n(t)-\Lambda_n(t)]d\psi(t)\right|\geqslant$$
$$\geqslant\omega_n-\sqrt{\int K_n^2(x^*,t)d\psi(t)\cdot\int[\lambda_n(t)-\Lambda_n(t)]^2d\psi(t)}\geqslant$$

---

1) A. Haar [1].

2) 如果我們作限制，假定：函数 $\psi(t)$ 連續，且每一函数 $K_n(x^*,t)$ 只有有限多次为零，亦即 $\lambda_n(t)$ 有有限个不連續点，那么只要在包含这些点的小区間中，用綫性函数代替 $\lambda_n(t)$ 以保証連續性。

3) 参看第134頁脚注。

$$\geqslant \omega_n - \sqrt{\delta_n \int K_n^2(x^*, t) d\psi(t)}\ .$$

如果把数 δ_n 选得使

$$\delta_n \int K_n^2(x^*, t) d\psi(t) < \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^2,$$

那么我們又得

$$\left| \int K_n(x^*, t) A_n(t) d\psi(t) \right| > \frac{\omega_n}{2}.$$

将可看出，对于函数 $A_m(x)$ 中之一，关系式

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A_m; x^*) = A_m(x^*)$$

不会成立．于是上面所表述的命題就会得証．我們来假定，对于每一函数 $A_m(x)$（因而对于它們中有限个的任何綫性組合），类似的关系式成立．

現在我們来考察函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} A_{q_n}(x),$$

其中数 q_n 形成無界增加序列．旣然函数 $f(x)$ 被表达为連續函数的一致收斂級数，它本身显然連續．

現在我們来从事选出数 q_n．令 $q_1 = p_1$．因为

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A_{p_1}; x^*) = A_{p_1}(x^*),$$

故可选取数 M_1，使 $P_n(A_{p_1}; x^*) \leqslant M_1 (n=1, 2, 3, \cdots)$．从序列 $p_2, p_3, \cdots$ 选出如此大的数 q_2，使 $\omega_{q_2} > 6 \cdot 4(M_1+1)$；为簡便計，我們令

$$f_2(x) = A_{q_1}(x) + \frac{1}{4} A_{q_2}(x).$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} P_n(f_2; x^*) = f_2(x^*),$$

故可选擇 M_2 使得 $P_n(f_2; x^*) \leqslant M_2 (n=1, 2, \cdots)$．現在从数列 p_n 中选出 q_3，使

$$\omega_{q_3} > 6 \cdot 4(M_2+2) \quad 与 \quad q_3 > q_2,$$

并令

$$f_3(x) = A_{q1}(x) + \frac{1}{4} A_{q2}(x) + \frac{1}{4^2} A_{q3}(x).$$

这样繼續下去，我們便得所需数列 $q_n (n=1, 2, 3, \cdots)$，且令

$$f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{4^{\nu-1}} A_{q_\nu}(x)$$

时，我們将有不等式

$$P_n(f_m; x^*) \leqslant M_m \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\omega_{q_n} > 6\cdot 4^{n-1}(M_{n-1}+n-1) \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

現在我們来估計 $P_{q_n}(f; x^*)$。为簡便計，令

$$\rho_n(x)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^{\nu-1}}A_{q_\nu}(x),$$

我們便得等式

$$f(x)=f_{n-1}(x)+\frac{1}{4^{n-1}}A_{q_n}(x)+\rho_n(x),$$

由此可見，

$$P_{q_n}(f; x^*)=P_{q_n}(f_{n-1}; x^*)+\frac{1}{4^{n-1}}P_{q_n}(A_{q_n}; x^*)+P_{q_n}(\rho_n; x^*).$$

这里

$$P_{q_n}(f_{n-1}; x^*) \leqslant M_{n-1},$$

又因

$$|\rho_n(x)| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^{\nu-1}}=\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}},$$

故

$$|P_{q_n}(\rho_n; x^*)|=\left|\int K_{q_n}(x^*,t)\rho_n(t)d\psi(t)\right| \leqslant \frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}\int |K_{q_n}(x^*,t)|\,d\psi(t)=\frac{\omega_{q_n}}{3\cdot 4^{n-1}},$$

但另一方面，如上面所已証明的，

$$|P_{q_n}(A_{q_n}; x^*)|=\left|\int K_{q_n}(x^*,t)A_{q_n}(t)d\psi(t)\right|>\frac{1}{2}\omega_{q_n}.$$

把这些結果比較一下，便推得：

$$|P_{q_n}(f; x^*)|>\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\omega_{q_n}-\left(M_{n-1}+\frac{\omega_{q_n}}{3\cdot 4^{n-1}}\right)=\frac{1}{6\cdot 4^{n-1}}\omega_{q_n}-M_{n-1}>n-1.$$

但在这种情况下，

$$\lim_{n\to\infty}|P_{q_n}(f; x^*)|=\infty,$$

这就証明了我們的論断。

如果轉到我們最有兴趣的情况，假設 $P_n(f; x)$是相应于权 $\psi(x)$的傅立叶級数的 n 項之和，那么用$\Phi_m(x)\ (m=0,1,2,\cdots)$来記关于这一权的正交（通常的，三角的，甚

或"广义的")多項式时,如在第40节中所做的,我們必須令

$$K_n(x,t)=\sum_{m=0}^{n}\Phi_m(x)\Phi_m(t).$$

我們限于正常意义下的傅立叶級数情况,此时 $K_{2n+1}(x,t)$ 由等式

$$K_{2n+1}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}$$

給出,由此应得(对任何 x^*):

$$\omega_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\right|du.$$

我們已經看到,存在着常数 K 使得

$$\omega_{2n+1}<K\lg n.$$

現在我們来論証,数 ω_{2n+1} 是無界的,即:

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{2n+1}=\infty.$$

事实上,把变数变换并逐次集聚积分,便得到$\left(\text{令 } N=\left[\frac{2n+1}{4}\right]\text{,因而}(2n-3)\frac{\pi}{2}<2N\pi\leqslant(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\omega_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin v}{\sin\frac{v}{2n+1}}\right|dv\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\int_0^{2N\pi}\left|\frac{\sin v}{\sin\frac{v}{2n+1}}\right|dv\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{N-1}\left[\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\frac{\sin v}{\sin\frac{v}{2n+1}}dv-\int_{(2m+1)\pi}^{2(m+1)\pi}\frac{\sin v}{\sin\frac{v}{2n+1}}dv\right].$$

因为在区間

$$2m\pi\leqslant v\leqslant(2m+1)\pi$$

中,我們有

$$\sin\frac{v}{2n+1}\leqslant\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n+1},$$

又在区間

$$(2m+1)\pi\leqslant v\leqslant 2(m+1)\pi$$

中,同样地有

$$\sin\frac{v}{2n+1}\geqslant\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n+1},$$

所以我們就得(因为当 $x>0$ 时，$0<\sin x<x$)：

$$\omega_{2n+1}\geqslant\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n+1}}\geqslant\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2m+1}>$$

$$>\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{m+1}>\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m},$$

而由調和級数的發散性便推得我們的論断。

基于上述定理，我們立刻断定：存在着連續函数，其（正常意义下的）傅立叶級数發散。

由一般理論，对勒讓德級数也能得出类似的結果。

附注 这里所叙述的平方逼近的發散性的証法与第 27 节中所引用的插补法的發散性的証法相似。这不是偶然的：我們可以修改一般定理的表述，使得也包括插补法的情况。

事实上，只要把 $P_n(f;x)$ 写成下形：

$$P_n(f;x)=\int f(t)d_t\Psi_n(x,t),$$

并要求函数 $\Psi_n(x,t)$ 在基本区間中对 x 連續，且对 t 有有界变差，而数

$$\omega_n=\int|d_t\Psi_n(x^*,t)|$$

不为有界(参看第 6 节)。我們便得發散定理的推广。为了要变到以 $x_i^{(n)}(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为基点的插补法的情况，应該把 $\Psi_n(x,t)$ 認作阶梯函数，它在各基点 $t=x_i^{(n)}$ 处有等于（x 的）多項式的跳躍，此种多項式在对应的基点处为一，而在其余的基点处为零。至于数 ω_n，它們就是这些多項式的絕对値的和。在第 27 节中已証明过，不論在怎样的一組基点之下，这些和数不可能有界。

与此相关，便得 B. Φ. 尼克拉也夫定理，它在某种程度上与关于插补基点的法柏定理相仿：

不在存这样的权 $p(x)$，能使任何連續函数可按这个权的正交多項式展开为一致收斂的級数。

由 С. М. 罗辛斯基与 Ф. И. 哈尔希拉特采所补充的稍稍更一般的定理的証明見下書：И. П. 那湯松[1]。(附录 3，原書第 672—678 頁。)

43. 傅立叶級数求和法。費叶方法 对已知連續周期函数写出其傅立叶級数(134)(第 38 节)，我們把这級数的部分和

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

当作近似表写函数 $f(x)$ 的三角多項式。用这一手續，如我們所知，就恰好解决了平方逼近的問題，且它——从运算的观点看来——比任何其他的手續来說具有無比的

优越性；如我們所已論証的，对極寬广的一类函数但不是一切連續函数，它也保証了一致收斂性

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

現在自然就提出下一問題：能否适当修改傅立叶級数的部分和 $f_n(x)$，作出新的三角多項式，使对任何連續函数 $f(x)$，它們一致收斂于 $f(x)$？

这种修改曾由費叶指出[1]，即：不用部分和 $f_n(x)$，費叶引进它們的算术平均值：

$$S_n(x)=\frac{1}{n}[f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x)], \tag{175}$$

并証明了新的这样得出的三角多項式 $S_n(x)$ 在函数 $f(x)$ 連續这唯一条件下一致收斂于这一函数。

为了証明这一論断起見，我們首先来建立下一比勒貝格定理（第 41 节）較强的定理：如果

$$|f(x)|\leqslant M,$$

那么

$$|S_n(x)|\leqslant M. \tag{176}$$

事实上，由第 41 节公式(159)推得：

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\sin(2m+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt.$$

注意

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sin(2m+1)\theta=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta},$$

由此得到：

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt, \tag{177}$$

最后，

$$|S_n(x)|\leqslant\frac{M}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt^{2)}=M.$$

1) L. Fejér[1].

2) 为了計算这一积分，我們注意，当 $f(x)\equiv1$ 时，由公式(177)可得

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt=1.$$

我們需要証明：不論 $\varepsilon(>0)$ 怎样小，从某一个值 n 开始，不等式

$$|S_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{178}$$

成立。由維尔斯德拉斯定理，存在着某个 p 次的三角多項式 $T(x)$ 滿足不等式

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{179}$$

应用剛才所証明的补助定理于函数 $f(x)-T(x)$，并用 $T_n(x)$ 来記对多項式 $T(x)$ 所构成的費叶和数，我們便得，不論 n 是怎样，

$$|S_n(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{180}$$

此外，只要 n 充分大，

$$|T_n(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{3}; \tag{181}$$

事实上，用 $t_m(x)$ 記对于 $T(x)$ 所构成的傅立叶級数部分和，我們将有：

$$t_p(x)=t_{p+1}(x)=\cdots=T(x),$$

从而当 $n\geqslant p$ 时，

$$T_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}t_m(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{p}t_m(x)+\left(1-\frac{p}{n}\right)T(x),$$

所以当 n 增加时，$T_n(x)$ 一致收斂于 $T(x)$。比較不等式(179)，(180)与(181)，便得到不等式(178)。

44. C. H. 伯恩斯坦所指出的傅立叶級数求和法 C. H. 伯恩斯坦曾提出[1]从傅立叶級数的部分和作出多項式的另一手續；在产生傅立叶級数的函数連續这唯一条件下，这些多項式一致收斂于这一函数。C. H. 伯恩斯坦的方法因其簡单而著名，同时并給出很好的逼近；此外，偏差的上界能够容易地用函数的連續模表达出来[2]。

本来，作为逼近多項式，可以取

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}\left[f_n(x)+f_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right], \tag{182}$$

其中 $f_n(x)$ 仍然是傅立叶級数的部分和。借第 40 节公式(157)，我們得到：

---

1) 也可参看 W. Rogosinski[1]。

2) 参看下面第 50 节。

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\left(\frac{x-t}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right]dt,$$

于是，如果 M 是 $f(x)$ 的最大模，便推得

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\frac{M}{4\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\left|\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{1}{\sin\left(\frac{x-t}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right|dt=$$

$$=\frac{M}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin(2n+1)\theta\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right]\right|d\theta\equiv\frac{M}{2\pi}\cdot I_n. \quad (183)$$

把积分 I_n 中絕对值符号下的函数記作 $\psi(\theta)$：

$$\psi(\theta)=\sin(2n+1)\theta\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right],$$

我們看到，这函数連續，且在一切形如 $\frac{m\pi}{2n+1}$（其中 m 取遍从 1 到 $2n$ 的整数值）的 θ 值处，但除掉 $\theta=\frac{n\pi}{2n+1}$ 以及 $\theta=\frac{2n\pi}{2n+1}$ 外，它变号。由此可見，

$$I_n=\int_0^{\pi}|\psi(\theta)|d\theta=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\int_{\frac{m\pi}{2n+1}}^{\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}\psi(\theta)d\theta-\sum_{m=n}^{2n-1}(-1)^m\int_{\frac{m\pi}{2n+1}}^{\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}\psi(\theta)d\theta+\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi}\psi(\theta)d\theta.$$

在每一积分中换变数，便得到：

$$I_n=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\psi\left(t+\frac{m\pi}{2n+1}\right)dt-$$

$$-\sum_{m=n}^{2n-1}(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\psi\left(t+\frac{m\pi}{2n+1}\right)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\psi\left(t+\frac{2n\pi}{2n+1}\right)dt.$$

由于

$$\psi\left(t+\frac{m\pi}{2n+1}\right)=(-1)^m\sin(2n+1)t\left[\frac{1}{\sin\left(t+\frac{m\pi}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\sin\left(t+\frac{(m+1)\pi}{2n+1}\right)}\right],$$

經消去后得：

$$I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\sin(2n+1)t\left[\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{\sin\left(t+\frac{n\pi}{2n+1}\right)}\right]dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin\left(t+\frac{2n\pi}{2n+1}\right)}dt.$$

因为由代换 $t=\frac{\pi}{2n+1}-u$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin\left(t+\frac{2n\pi}{2n+1}\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du,$$

于是

$$I_n=4\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin\left(t+\frac{n\pi}{2n+1}\right)}dt,$$

所以，令 $(2n+1)t=\varphi$，我們得：

$$I_n=4\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{(2n+1)\sin\frac{\varphi}{2n+1}}d\varphi-\frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi+n\pi}{2n+1}}d\varphi.$$

当 n 無限增加时，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{(2n+1)\sin\frac{\varphi}{2n+1}}d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi+n\pi}{2n+1}}d\varphi=2,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}I_n=4\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi,$$

由此可見，对一切 n 值，I_n 有界：

$$I_n<2\pi K. \tag{184}$$

(如果只考慮充分大的值 n，在这里 K 可以取得与

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi$$

相差任意小。)

因此，不等式(183)有下列形狀：

$$|\varphi_n(x)|\leqslant KM. \tag{185}$$

这个不等式类似于第 43 节的費叶不等式(176)。

应用不等式(185)于函数 $f(x)-T_n(x)$，其中 $T_n(x)$ 是与 $f(x)$ 相差不大于 ε_n 的一个 n 次三角多項式，于是由关系式

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant\varepsilon_n, \tag{186}$$

我們得出:

$$\left|\varphi_n(x)-\frac{1}{2}\left[T_n(x)+T_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]\right|\leqslant K\varepsilon_n. \tag{187}$$

但不等式(186)等价于:

$$\left|f\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-T_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right|\leqslant\varepsilon_n. \tag{188}$$

而从不等式(186),(187)与(188)可推出

$$\left|\frac{1}{2}\left[f(x)+f\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]-\varphi_n(x)\right|\leqslant(K+1)\varepsilon_n. \tag{189}$$

因为,显然

$$\left|f\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-f(x)\right|\leqslant\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \tag{190}$$

[其中 $\omega(\delta)$ 表 $f(x)$ 的連續模],所以从不等式(189)与(190)推得

$$|f(x)-\varphi_n(x)|\leqslant(K+1)\varepsilon_n+\frac{1}{2}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right). \tag{191}$$

从 $f(x)$ 的連續性能断定,当 n 無限增加时,上列不等式右端趋向于零,因而其左端也趋向于零[1]。

我們試圖用一般的表述来把握最后这两节所述的东西。

如在第42节中一样,假定存在着連續函数 $f(x)$ 的一系列逼近式 $P_n(f;x)$,它們是由下列公式給出的:

$$P_n(f;x)=\int K_n(x,t)f(t)d\psi(t) \qquad (n=1,2,3,\cdots);$$

保持以前的假設,我們現在将認为数

$$\omega_n=\int|K_n(x,t)|d\psi(t)$$

有界,且設对 x 一致有界,因而

---

1) 譯者注:这可以另取下一較直接的証法如下。对任一 $\varepsilon>0$,必有一 p 次三角多項式 $T(x)$ 存在,使

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

由(185),

$$\left|\varphi_n(x)-\frac{1}{2}\left[T_n(x)+T_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]\right|<K\varepsilon,$$

其中 $T_n(x)$ 为 $T(x)$ 的傅立叶部分和。显然当 $n\geqslant p$ 时,$T_n(x)=T(x)$,因此当 n 充分大后,可使

$$\left|T(x)-\frac{1}{2}\left[T_n(x)+T_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]\right|=\frac{1}{2}\left|T(x)-T\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right|<\varepsilon \tag{*}$$

(由 $T(x)$ 的一致連續性)。利用以上三不等式,便得

$$|f(x)-\varphi_n(x)|<(K+2)\varepsilon.$$

这一証法的好处在于:由(*)式知,任何三角多項式的伯恩斯坦和一致收斂于該多項式。因此立刻可見下面一般問題的說明对伯恩斯坦和有效。

$$\omega_n \leqslant \Omega,$$

其中 Ω 是一絕对常数。又假設，如果 $\Pi(x)$ 是多項式[通常的或三角的[1)]]，則極限关系式

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\Pi; x) = \Pi(x)$$

总是被满足，且一致地被满足。

在这样一些条件下，可以証明，上列关系式对于任一連續函数 $f(x)$ 也一致地被满足。

事实上，把 $f(x)$ 算作已知連續函数，根据維尔斯特拉斯定理，可以选取 m 次多項式 $\Pi_m(x)$，使得

$$|\Pi_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\Omega+2}.$$

对差数 $f(x) - \Pi_m(x)$ 作逼近 P_n：

$$P_n(f - \Pi_m; x) = P_n(f; x) - P_n(\Pi_m; x).$$

由前面的不等式，我們得到：

$$|P_n(f-\Pi_m; x)| \leqslant \int |K_n(x,t)| \cdot |f(t) - \Pi_m(t)| \, d\psi(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\Omega+2} \int |K_n(x,t)| \, d\psi(t) = \frac{\varepsilon\omega_n}{\Omega+2} < \frac{\varepsilon\Omega}{\Omega+2},$$

所以

$$|P_n(\Pi_m; x) - P_n(f; x)| \leqslant \varepsilon \frac{\Omega}{\Omega+2}.$$

另一方面，根据所作假定，

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\Pi_m; x) = \Pi_m(x),$$

所以对于充分大的 n，

$$|P_n(\Pi_m; x) - \Pi_m(x)| < \frac{\varepsilon}{\Omega+2}.$$

然則

$$|P_n(f; x) - f(x)| \leqslant$$

---

1) 甚或"广义的"多項式，但要有一限制性条件，即已知函数 $\Phi_n(x)$ 在一致逼近的意义下形成一閉合系，亦即对任一連續函数 $f(x)$ 以及任一 $\varepsilon(>0)$，可以选取組合

$$\Pi_n(x) = \sum_{m=1}^{n} c_m \Phi_m(x)$$

使不等式 $|\Pi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立。

$$\leqslant |P_n(f;x)-P_n(\Pi_m;x)|+|P_n(\Pi_m;x)-\Pi_m(x)|+|\Pi_m(x)-f(x)|<$$

$$<\varepsilon\frac{\Omega}{\Omega+2}+\frac{\varepsilon}{\Omega+2}+\frac{\varepsilon}{\Omega+2}=\varepsilon,$$

这就証明了我們的論断.

在費叶过程(第 43 节)的情况下,設$\psi(t)\equiv t$,可以令

$$K_n(x,t)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2,$$

由此便得

$$\omega_n=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2dt=1.$$

同样,在 C. H. 伯恩斯坦过程的情况下,我們令

$$K_n(x,t)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\left(\frac{x-t}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right],$$

于是推得

$$\omega_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}\left[\frac{1}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{1}{\sin\left(\frac{x-t}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right]\right|dt,$$

如我們所已看到的,且有

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi.$$

注意到上述二过程对三角多項式都收斂,我們直接断定,它們对任意的連續函数也收斂.

附注 把逼近 $P_n(f;x)$ 写成下列形状:

$$P_n(f;x)=\int f(t)d_t\Psi_n(x,t),$$

并令

$$\omega_n=\int|d_t\Psi_n(x,t)|,$$

我們就可推广上述最后一定理,使它也包括插补过程作为一特殊情况.

譬如,在有契比謝夫基点的費叶插补法(第 28 节)的情况下,取阶梯函数(对于 t)作为函数 $\Psi_n(x,t)$,它在基点 $t=x_m^{(n)}$ 处作等于

$$h_m^{(n)}(x)=\frac{1}{n^2}(1-xx_m^{(n)})\left[\frac{T_n(x)}{x-x_m^{(n)}}\right]^2$$

的跳躍，其中 $T_n(x)=\cos n \operatorname{arc}\cos x$. 然則

$$\omega_n=\sum_{m=1}^{n} h_m^{(n)}(x)=1,$$

于是便推出收斂性.

这里也包括 С. Н. 伯恩斯坦的逼近过程(第 24 节)；这时函数 $\Psi_n(x,t)$ 也是阶梯的：在 $t=\frac{m}{n}$ 处的跳躍等于

$$C_n^m x^m(1-x)^{n-m} \qquad (m=0,1,2,\cdots,n),$$

且这一次

$$\omega_n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=1.$$

然而要想对任一連續函数 $f(x)$ 作出收斂的結論，还必須事先驗証对任一多項式的收斂性[1]或者对 $f(x)=x^p(p=0,1,2,\cdots)$ 的收斂性，也就是必須求証公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{m=0}^{n} m^p C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=x^p.$$

延續第 25 节的一串公式(22)，我們容易得到对任何 p 的这一公式.

45. 平方逼近理論与連分数理論的联系　設在本节中用 $P_n(x)$ [而不用 $\Phi_n(x)$] $(n=0,1,2,\cdots)$ 来表示，对于区間 (a,b) 以及权 $\psi(x)$ 的通常多項式的正交系。

我們将假定，权 $\psi(x)$ 滿足等式

$$\int_a^b d\psi(x)=1.$$

我們来考察下列函数

$$Q_n(z)=\int_a^b\frac{P_n(x)\,d\psi(x)}{z-x} \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{192}$$

与函数 $P_n(x)$ 相反，函数 $Q_n(z)$ 不是多項式：对于基本区間 (a,b) 中的点，函数 $Q_n(z)$ 一般沒有意义；只有对于变数的一切复数值以及不屬基本区間的实数值，它才是单值地被确定的且为正則的。如这区間的所有点包含在以 $z=0$ 为中心 R 为半徑的圓中，那么函数 $Q_n(z)$ 可以展开为一級数，按变数 z 的遞減負冪排列，且对于模大于 R' ($R'>R$) 的 z 值一致收斂。令

$$Q_n(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu^{(n)}}{z^\nu}, \tag{193}$$

1) 对于插补过程来說这是自明的，因为当次数充分高时，插补多項式与已知多項式融合为一。

我們得到

$$c_\nu^{(n)}=\int_a^b x^{\nu-1}P_n(x)d\psi(x), \tag{194}$$

而由于多項式 $P_n(x)$ 的基本性質，当 $\nu\leqslant n$ 时这些积分为零，所以 $Q_n(z)$ 的展开式事实上是从 $\frac{1}{z}$ 的 $(n+1)$ 次幂开始的：

$$Q_n(z)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_\nu^{(n)}}{z^\nu}. \tag{195}$$

特别，

$$Q(z)\equiv Q_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu^{(0)}}{z^\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_{\nu-1}}{z^\nu}, \tag{196}$$

其中系数 $c_i(i\geqslant 0)$ 与第 32 节中的有相同的值。

函数 $Q_n(z)$ 满足与多項式 $P_n(x)$ 所滿足的相同的遞推关系式。事实上，用 $z-x$ 除等式(48)，再对 x 以权 $\psi(x)$ 积分，注意到

$$\frac{x}{z-x}=\frac{z}{z-x}-1,$$

以及当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\int_a^b P_n(x)d\psi(x)=0,$$

我們便得关系式

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}(z)-(z+\beta_n)Q_n(z)+\alpha_nQ_{n-1}(z)=0. \tag{197}$$

相反地，当 $n=0$ 时，

$$\int_a^b P_n(x)d\psi(x)=1,$$

于是便得：

$$\alpha_1Q_1(z)-(z+\beta_0)Q_0(z)+1=0. \tag{198}$$

最后，我們来討論由下列等式所定义的函数 $R_n(z)$：

$$R_n(z)=\int_a^b\frac{P_n(z)-P_n(x)}{z-x}d\psi(x) \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{199}$$

因为被积分的表达式显然是 z 的 $n-1$ 次多項式，所以可断定 $R_n(z)$ 也是 $n-1$ 次多項式。特别，易見

$$R_0(z)=0, \qquad R_1(z)=\frac{1}{\alpha_1}.$$

把(199)右端的积分拆成两項，我們得恒等式

$$R_n(z)=P_n(z)Q(z)-Q_n(z) \tag{200}$$

或者

$$Q(z)P_n(z)=R_n(z)+Q_n(z). \tag{201}$$

由此便得一很方便的办法来計算函数 $R_n(z)$ 与 $Q_n(z)$ $(n\geqslant 1)$，同时也能計算系数 $c_\nu^{(n)}$. 因为 $R_n(z)$ 是一多項式，而 $Q_n(z)$ 是表作 z 的負冪級数的形状，所以只要把 $Q(z)$ 与 $P_n(z)$ 相乘，那么乘积(它以 z 的降冪排列)的整式部分便是 $R_n(z)$，而分式部分便是 $Q_n(z)$。

从恒等式(200)得知，函数 $R_n(x)$，和函数 $P_n(x)$ 以及 $Q_n(x)$ 一样，滿足同一遞推关系式：

$$\alpha_{n+1}R_{n+1}(x)-(x+\beta_n)R_n(x)+\alpha_nR_{n-1}(x)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

在多項式 $P_n(x)$ 的任二相接零点之間有多項式 $R_n(x)$ 的一个(而且只有一个)零点。这可从第 39 节不等式(148)推出。事实上，設 $x_i^{(n)}$ 与 $x_{i+1}^{(n)}$ 是 $P_n(x)$ 的两个相接零点。按第 29 节公式(145)，我們有

$$A_i^{(n)}=\frac{R_n(x_i^{(n)})}{P'_n(x_i^{(n)})}. \tag{202}$$

显然，$P'_n(x_i^{(n)})$ 与 $P'_n(x_{i+1}^{(n)})$ 的符号相异，因此，因为 $A_i^{(n)}>0$，于是 $R_n(x_i^{(n)})$ 与 $R_n(x_{i+1}^{(n)})$ 的符号也相异。所以 $R_n(x)$ 在区間 $(x_i^{(n)}<x<x_{i+1}^{(n)})$ 中有零点；因为这种区間一共有 $n-1$ 个，而 $R_n(x)$ 的次数又等于 $n-1$，所以在每一区間中不能有多于一个零点。

認識了函数 $Q_n(z)$ 与多項式 $R_n(z)$ 后，我們一面来推演多項式 $P_n(z)$ 与 $R_n(z)$ 間的值得注意的关系式，另一面来推演函数 $Q(x)$ 的連分数展开式。

把 z 改为 x，公式(198)可重写为下列形状：

$$Q(x)\equiv Q_0(x)=\cfrac{1}{x+\beta_0-\cfrac{\alpha_1^2}{\alpha_1\dfrac{Q_0(x)}{Q_1(x)}}},$$

而由公式(197)推得

$$\alpha_n\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}=x+\beta_n-\cfrac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}\dfrac{Q_n(x)}{Q_{n+1}(x)}} \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

由此推出，

$$Q(x)=\cfrac{1}{x+\beta_0-\cfrac{\alpha_1^2}{x+\beta_1-\cfrac{\alpha_2^2}{x+\beta_2-\cdots-\cfrac{\alpha_n^2}{x+\beta_n-\cfrac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}\cfrac{Q_n(x)}{Q_{n+1}(x)}}}}}}. \tag{203}$$

考察無穷連分数

$$\cfrac{1}{x+\beta_0-\cfrac{\alpha_1^2}{x+\beta_1-\cfrac{\alpha_2^2}{x+\beta_2-\cdots-\cfrac{\alpha_{n-1}^2}{x+\beta_{n-1}-\cdots}}}}, \tag{204}$$

我們可以把它写成下列形狀：

$$\cfrac{1/\alpha_1}{\cfrac{x+\beta_0}{\alpha_1}+\cfrac{(-\alpha_1/\alpha_2)}{\cfrac{x+\beta_1}{\alpha_2}+\cfrac{(-\alpha_2/\alpha_3)}{\cfrac{x+\beta_2}{\alpha_3}+\cdots+\cfrac{(-\alpha_{n-1}/\alpha_n)}{\cfrac{x+\beta_{n-1}}{\alpha_n}+\cdots}}}}. \tag{205}$$

如所周知，連分数

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cdots+\cfrac{a_n}{b_n+\cdots}}}} \tag{206}$$

的收歛子(подходящая дробь)

$$\frac{A_n}{B_n}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

的分子 A_n 与分母 B_n 是由下列等式确定的：

$$\left.\begin{aligned}&A_1=a_1,\quad A_2=b_2a_1,\quad A_{n+1}=b_{n+1}A_n+a_{n+1}A_{n-1}\\&B_1=b_1,\quad B_2=b_2b_1+a_2,\quad B_{n+1}=b_{n+1}B_n+a_{n+1}B_{n-1}\end{aligned}\right\}\qquad (n=2,3,\cdots); \tag{207}$$

由此容易求出(205)以及(204)的收歛子的分子与分母；即：

$$A_n=R_n(x),\qquad B_n=P_n(x). \tag{208}$$

实际上，在我們的情况下，$a_n=-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$，$b_n=\frac{x+\beta_{n-1}}{\alpha_n}$；直接驗証可得：

$$R_1(x)=\frac{1}{\alpha_1},\qquad R_2(x)=\frac{1}{\alpha_1}\ \frac{x+\beta_1}{\alpha_2};$$

$$P_1(x)=\frac{x+\beta_0}{\alpha_1},\qquad P_2(x)=\frac{x+\beta_0}{\alpha_1}\cdot\frac{x+\beta_1}{\alpha_2}+\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right);$$

此外，多項式 $R_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 滿足下列形狀的遞推关系式：

$$R_{n+1}(x)=\frac{x+\beta_n}{\alpha_{n+1}}R_n(x)-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}R_{n-1}(x); \tag{209}$$

$$P_{n+1}(x)=\frac{x+\beta_n}{\alpha_{n+1}}P_n(x)-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}P_{n-1}(x). \tag{210}$$

連分数(205)对一切不屬于基本区間的值 x 收斂，且等于 $Q(x)$。此外，可以斷定，在任一与基本区間 (a,b) 無公共点的閉区域 Ω 中，收斂是一致的。

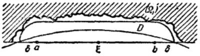


圖 22

因为 $Q(z)$，$P_n(z)$ 与 $R_n(z)$ 使变数 z 的共軛复值对应于函数的共軛复值，所以只要考察区域 Ω 中位于半平面 $y\geqslant 0$ 的部分 Ω_1 就够了。只要証明了在区域 Ω_1 中分数 $\frac{R_n(z)}{P_n(z)}$ 一致收斂于 $Q(z)$，那也就証明了在区域 Ω 中位于半平面 $y\leqslant 0$ 的部分 Ω_2 內，一致收斂性成立，因而在整个区域 Ω 中一致收斂性也成立。

設 δ 是区域 Ω 与区間 (a,b) 間的最短距离，并設 (D) 是离区間 (a,b) 的距离小于 δ 的点的区域。令 $\xi=\frac{a+b}{2}$。我說可以选取如此大的一正数 η，使得以点 $\zeta=\xi-i\eta$ 为中心，且通过点 $z=a-\delta$ 与 $z=b+\delta$ 的圓的內部，不含区域 Ω_1 的点（圖 22）。实际上，为此，只要圓半徑

$$\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}+\delta\right)^2+\eta^2}$$

不超过 $\eta+\delta$，而这个条件对充分大的值 η 当然适合。因为閉区間 (a,b) 位于我們的圓的內部，而区域 Ω_1 显然在它的外部，由此可見，不論 x 在区間 (a,b) 中是怎样，也不論 z 在区域 Ω_1 中是怎样，必須有不等式

$$\left|\frac{\zeta-x}{\zeta-z}\right|<\theta, \tag{211}$$

其中 θ 是滿足不等式 $0<\theta<1$ 的某一常数。然后应用求积公式 (144) 于 $2n-1$ 次多項式

$$F_n(x)=\frac{1-\left(\frac{\zeta-x}{\zeta-z}\right)^{2n}}{z-x},$$

我們將有：

$$\int_a^b F_n(x)d\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}F_n(x_i^{(n)}). \tag{212}$$

另一方面，由于$\frac{R_n(z)}{P_n(z)}$是一眞分式，把它拆成分項分式：

$$\frac{R_n(z)}{P_n(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-x_i^{(n)}}\cdot\frac{R_n(x_i^{(n)})}{P'_n(x_i^{(n)})}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i^{(n)}}{z-x_i^{(n)}}. \tag{213}$$

借公式(212)与(213)，我們得到：

$$\begin{aligned}Q(z)-\frac{R_n(z)}{P_n(z)}&=\int_a^b\frac{d\psi(x)}{z-x}-\frac{R_n(z)}{P_n(z)}=\int_a^b\left(\frac{1}{z-x}-F_n(x)\right)d\psi(x)-\\&-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{z-x_i^{(n)}}-F_n(x_i^{(n)})\right)A_i^{(n)}=\int_a^b\left(\frac{\zeta-x}{\zeta-z}\right)^{2n}\frac{d\psi(x)}{z-x}-\\&-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\zeta-x_i^{(n)}}{\zeta-z}\right)^{2n}\frac{A_i^{(n)}}{z-x_i^{(n)}},\end{aligned} \tag{214}$$

所以由(211)，(147)与(148)，

$$\begin{aligned}\left|Q(z)-\frac{R_n(z)}{Q_n(z)}\right|&\leqslant\int_a^b\left|\frac{\zeta-x}{\zeta-z}\right|^{2n}\frac{d\psi(x)}{|z-x|}+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\zeta-x_i^{(n)}}{\zeta-z}\right|^{2n}\frac{A_i^{(n)}}{|z-x_i^{(n)}|}<\\&<\theta^{2n}\left[\int_a^b\frac{d\psi(x)}{|z-x|}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i^{(n)}}{|z-x_i^{(n)}|}\right]\leqslant\frac{\theta^{2n}}{\delta}\left[\int_a^b d\psi(x)+\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}\right]=\frac{2}{\delta}\theta^{2n}.\end{aligned}$$

由此可見：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_n(z)}{P_n(z)}=Q(z)$（一致于 Ω_1 中）。

我們已經論証了，函数

$$Q(z)\equiv\int_a^b\frac{d\psi(x)}{z-x}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_{\nu-1}}{x^{\nu}}. \tag{215}$$

可以展开为連分数(204)，除在基本区間外，这連分数处处收斂，且第 n 个收斂子的分母是我們的 n 次多項式 $P_n(z)$，而分子是 $n-1$ 次的多項式 $R_n(z)$. 从公式(200)推得：

$$Q(z)-\frac{R_n(z)}{P_n(z)}=\frac{Q_n(z)}{P_n(z)},$$

又因 $Q_n(z)$ 按 z 降冪的展开式从$\frac{1}{z^{n+1}}$級的項开始，故上面等式的右端按 z 降冪的展开式从 $\frac{1}{z^{2n+1}}$ 級的項开始，因而其左端也是这样。容易明白，对于由形如(204)展开式所表写的已知函数 $Q(z)$，只能选出一个有理函数$\frac{R_n(z)}{P_n(z)}$，其分母为 n 次而且具有这

样的性質：$Q(z)-\frac{R_n(z)}{P_n(z)}$按$z$的降冪展开式从$\frac{1}{z^{2n+1}}$級的項开始[1)]．由此推得关于权$\psi(x)$的正交多項式$P_n(z)$的計算办法：只要把函数

$$Q(z)\equiv\int_a^b\frac{d\psi(x)}{z-x}$$

展开(用連除法)为連分数，使得$Q(z)$与第n个收斂子間的差为$\frac{1}{z^{2n+1}}$級的，于是收斂子的各分母分别与未知多項式只差一常数因子；要想得到$P_n(z)$，只要再把求出的多項式正規化就行了．

例 1. 对区間$-1\leqslant x\leqslant+1$的契比謝夫权

$$p(x)=\psi'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

情况下，函数

$$Q(z)=\int_{-1}^{+1}\frac{d\psi(x)}{z-x}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,{}^{2)}$$

可展开为連分数如下：

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}=\cfrac{1}{z-\cfrac{1/2}{z-\cfrac{1/4}{z-\cfrac{1/4}{z-\cdots}}}}.$$

契比謝夫多項式$T_n(x)$，除常数因子外，与各收斂子的分母一致．

例 2. 在权(同一区間上)

$$p(x)=\psi'(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

之下，我們得到

$$Q(z)=\int_{-1}^{+1}\frac{d\psi(x)}{z-x}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{z-x}\,dx=\frac{2}{z+\sqrt{z^2-1}},$$

---

1) 事实上，設差数

$$Q(z)-\frac{R_n(z)}{P_n(z)}\quad 与\quad Q(z)-\frac{R_n^*(z)}{P_n^*(z)}$$

为$\frac{1}{z^{2n+1}}$級．且多項式$P_n(z)$与$P_n^*(z)$为n次的；則差数$\frac{R_n}{P_n}-\frac{R_n^*}{P_n^*}\equiv\frac{R_nP_n^*-R_n^*P_n}{P_nP_n^*}$亦为$\frac{1}{z^{2n+1}}$級．但这只有在$R_nP_n^*-R_n^*P_n\equiv 0$亦即在$\frac{R_n^*}{P_n^*}\equiv\frac{R_n}{P_n}$的条件下才可能．

2) 作代換$z=\cos\theta$，可得积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta},$$

这在第34节中已算出来了．

而連分数展开式

$$\frac{2}{z+\sqrt{z^2-1}}=\cfrac{1}{z-\cfrac{1/4}{z-\cfrac{1/4}{z-\cdots}}}.$$

各收斂子的分母为(除常数因子外)多項式 $U_n(x)$.

例 3. 在权

$$p(x)=\psi(x)=\frac{1}{2}$$

之下,我們有:

$$Q(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{z-x}=\lg\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}=\cfrac{1}{z-\cfrac{1/3}{z-\cfrac{4/15}{z-\cfrac{9/35}{z-\cdots+\cfrac{\left(-\frac{n^2}{4n^2-1}\right)}{z-\cdots}}}}},$$

而收斂子就是勒讓德多項式 $X_n(x)$.

附注 前面正交多項式一般理論的叙述是不依賴于連分数理論而作出的;只是在本节(第 45 节)中方建立了这两种理論的联系. 从历史观点来看,值得注意:正交多項式的一般理論的創始者 П. Л. 契比謝夫是从把函数展开为連分数出發的;所以他把这两种理論有机地融合为一.

第四章

平均羃逼近法与一致(最好)逼近法

46. 平均数理論 假定 a 与 b 是两个正数，而且为了明确起见，設

$$a \leqslant b. \tag{1}$$

数量

$$\frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{2ab}{a+b}$$

分别称为数 a 及 b 的算术平均、几何平均与調和平均．它們都在 a 与 b 之間，而且只有当 $a=b$ 时才可能相等．由这个性質可見平均这一名称是合宜的．

例 1. 两数的調和平均不超过它們的算术平均．

实际上，由 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ 可推得 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ 及 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$．只有当 $a=b$ 时才可能得到等式．

例 2. 两数的調和平均不超过它們的几何平均．

实际上，由 $(a-b)^2 \geqslant 0$ 可推得 $(a+b)^2 \geqslant 4ab$，以及 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ 与 $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$．在这次也是只有当 $a=b$ 时才可能得到等式．

一般地我們約定把下列等式所确定的数量 $\Delta_s(a,b)$ 称为 a 与 b 两数的 s 阶 $(s \neq 0)$ 平均：

$$\Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{2}$$

特别，当 $s=1$ 及 $s=-1$ 时，就得到算术平均与調和平均：

$$\Delta_1(a,b) = \frac{a+b}{2}, \qquad \Delta_{-1}(a,b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

表达式(2)当 $s=0$ 时沒有意义．然而当 s 趋近于零时，$\Delta_s(a,b)$ 有極限，并且这个極限等于几何平均 $\sqrt{ab}$．事实上，

$$\lg \Delta_s(a,b) = \frac{1}{s} \lg\left(1+\frac{a^s-1}{2}+\frac{b^s-1}{2}\right),$$

因而

$$\lim_{s\to 0} \lg \Delta_s(a,b) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \lg\left(1+\frac{a^s-1}{2}+\frac{b^s-1}{2}\right) =$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{a^s-1}{2}+\frac{b^s-1}{2}\right)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),$$

由此可得[如果令 $\Delta_0(a,b)=\lim\limits_{s\to 0}\Delta_s(a,b)$]

$$\Delta_0(a,b)=\sqrt{ab}.$$

数量

$$\Delta_2(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

称为数 a 及 b 的**平方平均**.

例 3. 两数的算术平均不超过它們的平方平均.

实际上,由 $(a-b)^2\geqslant 0$ 可得

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},$$

于是

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

显然,任意阶 s 的平均 $\Delta_s(a,b)$ 在 a 与 b 之間:

$$a\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant b.$$

我們已經証明

$$a\leqslant\Delta_{-1}(a,b)\leqslant\Delta_0(a,b)\leqslant\Delta_1(a,b)\leqslant\Delta_2(a,b)\leqslant b,$$

而且这些不等式中任一不等式只有当 $a=b$ 时才可換成等式.

現在要証明:**如果 $a<b$,那么平均 $\Delta_s(a,b)$ 是阶数 s 的增函数**,这就是說,当 $s_1<s_2$ 时,下列不等式成立:

$$\Delta_{s_1}(a,b)\leqslant\Delta_{s_2}(a,b).$$

我們只須証明(假定 $s\neq 0$)

$$\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(a,b)>0.$$

而

$$\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(a,b)=\frac{1}{s}\cdot\frac{a^s\lg a+b^s\lg b}{a^s+b^s}-\frac{1}{s^2}\lg\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right),$$

由此得

$$s^2\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(a,b)=\frac{A\lg A+B\lg B}{A+B}-\lg\frac{A+B}{2},$$

其中

$$A=a^s,\qquad B=b^s,$$

或可换写为

$$s^2\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(a,b)=\frac{A\lg A-2\cdot\frac{A+B}{2}\lg\frac{A+B}{2}+B\lg B}{A+B}.$$

上式右端分数的分子是函数 $\varphi(t)=t\lg t$ 的二阶有限差，又因 $\varphi''(t)=\frac{1}{t}>0$，所以这个有限差是正数。由此得出所需要的結論[1]。

最后要証明

$$\lim_{s\to\infty}\Delta_s(a,b)=b, \tag{3}$$

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=a. \tag{4}$$

如果注意到 $\frac{a}{b}\leqslant 1$，那么关系式(3)可以直接由平均值 $\Delta_s(a,b)$ 的下列表示式推出：

$$\Delta_s(a,b)=\frac{b}{\sqrt[s]{2}}\sqrt[s]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^s}.$$

同样可証明关系式(4)。

如果[除去条件(1)]約定用 $\overline{\Delta}(a,b)$ 及 $\underline{\Delta}(a,b)$ 分别表示 a 与 b 两数中最大的及最小的数，那么下列关系式成立：

$$\lim_{s\to\infty}\Delta_s(a,b)=\overline{\Delta}(a,b), \tag{5}$$

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\underline{\Delta}(a,b). \tag{6}$$

平均数 $\Delta_s(a,b)$ 以及 $\overline{\Delta}(a,b)$ 与 $\underline{\Delta}(a,b)$ 显然有**齐次性**：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_s(\lambda a,\lambda b)=\lambda\Delta_s(a,b),\\&\overline{\Delta}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\overline{\Delta}(a,b),\qquad(\lambda>0).\\&\underline{\Delta}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\underline{\Delta}(a,b)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

如果除了正数 a 与 b 以外，还給出 a' 与 b' 两正数，那么**当 $s\geqslant 1$ 时，下列不等式成立**：

$$\Delta_s(a+a',b+b')\leqslant\Delta_s(a,b)+\Delta_s(a',b'). \tag{8}$$

为了証明起見，令

$$\varphi(t)\equiv\frac{1}{2}\{[ta+(1-t)a']^s+[tb+(1-t)b']^s\}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

---

1) 为了包括 $s=0$ 的情形，只須証明極限

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(a,b)$$

存在并且是正数。

考虑函数

$$\Phi(t) \equiv \varphi^{\frac{1}{s}}(t).$$

計算后可得：

$$\Phi''(t) = \frac{1}{s^2}\varphi^{\frac{1}{s}-2}(t)[s\varphi(t)\varphi''(t) - (s-1)\varphi'^2(t)];$$

而在另一方面，我們有：

$$s\varphi(t)\varphi''(t) - (s-1)\varphi'^2(t) =$$

$$= \frac{1}{4}s^2(s-1)[ta+(1-t)a']^{s-2}[tb+(1-t)b']^{s-2}(ab'-a'b)^2.$$

上列等式的右边当 $s>1$ 时是正数，当 $s=1$ 时恒等于零．因此

$$\Phi''(t) \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

从而

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2}.$$

因为

$$\Phi(0) = \Delta_s(a',b'), \qquad \Phi(1) = \Delta_s(a,b), \qquad \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Delta_s(a+a',b+b'),$$

所以从上一不等式可推得不等式(8)．我們指出在关系式(8)中，只有当 $s=1$ 或 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$ 时才能用等号．

在不等式(8)中令 s 無限增大，在極限情形可得

$$\bar{\Delta}(a+a',b+b') \leqslant \bar{\Delta}(a,b) + \bar{\Delta}(a',b'), \tag{9}$$

可是这个不等式也是明显直接的．

由上述可知，当 $s<1$ 时，不等式(8)不能成立．而在这种情形下我們有不等式

$$\Delta_s^s(a+a',b+b') \leqslant \Delta_s^s(a,b) + \Delta_s^s(a',b'). \tag{10}$$

这是由于当 $s \leqslant 1$ 时，

$$(x+y)^s \leqslant x^s + y^s \text{[1]} \qquad (x, y \geqslant 0). \tag{11}$$

s 阶平均量的概念可以推广到有 n 个已給的数 a_i 的情形($i=1, 2, \cdots, n$)，这时令

$$\Delta_s(a_i) = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{12}$$

特别是算术平均、几何平均与平方平均可由下列公式給出：

---

1) 实际上，如果 $0<s<1$，那么函数 $\varphi(\mu) = \frac{(1+\mu)^s}{1+\mu^s}$ 当 $0<\mu<1$ 时是減函数，当 $\mu>1$ 时是增函数；因为 $\varphi(0) = \lim_{\mu\to 0}\varphi(\mu) = 1$，所以显然 $\varphi(\mu) \leqslant 1$，由此代入 $\mu = \frac{y}{x}$ 后，就得到(11)．

$$\Delta_1(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$\Delta_0(a_i)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$\Delta_2(a_i)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

与两个数的情形一样，可以証明：

1) 如果用 $\underline{\Delta}(a_i)$ 及 $\overline{\Delta}(a_i)$ 表示 a_i 中最小的及最大的数：

$$\underline{\Delta}(a_i)=\min(a_1,a_2,\cdots,a_n),\qquad \overline{\Delta}(a_i)=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

那么

$$\underline{\Delta}(a_i)\leqslant\Delta_s(a_i)\leqslant\overline{\Delta}(a_i);$$

2) $\Delta_s(a_i)$ 是阶数 s 的增函数[1]，这就是說，由不等式 $s_1<s_2$ 可推得

$$\Delta_{s_1}(a_i)<\Delta_{s_2}(a_i);$$

3) 关系式

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a_i)=\underline{\Delta}(a_i),\qquad \lim_{s\to\infty}\Delta_s(a_i)=\overline{\Delta}(a_i)$$

成立；

4) 当 $\lambda>0$ 时，$\Delta_s(\lambda a_i)=\lambda\Delta_s(a_i)$，并且也有 $\underline{\Delta}(\lambda a_i)=\lambda\underline{\Delta}(a_i)$ 与 $\overline{\Delta}(\lambda a_i)=\lambda\overline{\Delta}(a_i)$；最后，

5) 对于已給的数 a_i 与 a_i' $(i=1,2,\cdots,n)$，我們得到

$$\Delta_s(a_i+a_i')\leqslant\Delta_s(a_i)+\Delta_s(a_i')\qquad (s\geqslant 1),$$

$$\Delta_s^s(a_i+a_i')\leqslant\Delta_s^s(a_i)+\Delta_s^s(a_i')\qquad (s\leqslant 1).$$

我們进一步推广就得到 s 阶加权平均的概念：

$$\Delta_s(a_i)=(p_1a_1^s+p_2a_2^s+\cdots+p_na_n^s)^{\frac{1}{s}},\tag{13}$$

其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是滿足等式

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

的正数。这时性質(1)—(5)还是成立，不必作任何改变。

最后，我們可以轉到在已知区間上給出、并且在这区間上不取負值的函数 $f(x)$ 的 s 阶平均的概念：

$$\Delta_s(f)=\left[\int_a^b f^s(x)p(x)dx\right]^{\frac{1}{s}},\tag{14}$$

其中 $p(x)$ 是微分权，它是在同一区間上給出、并且滿足条件

1) 在 $\underline{\Delta}(a_i)<\overline{\Delta}(a_i)$ 时.

$$\int_a^b p(x)\,dx=1 \tag{15}$$

的非負函数。

微分权 $p(x)$ 也可用积分权 $\psi(x)$ 来代替，这时就有斯提叶斯积分

$$\Delta_s(f)=\left[\int_a^b f^s(x)\,d\psi(x)\right]^{\frac{1}{s}}, \tag{16}$$

其中 $\psi(x)$ 是在区間(a,b)上給出的不減函数，并且适合

$$\int_a^b d\psi(x)=1. \tag{17}$$

当然，由斯提叶斯积分(16)所給出的平均量表达式，是上面所講到的最一般的平均量表达式。特別，如果函数 $\psi(x)$ 有导数$\psi'(x)$，那么积分(16)可化成(14)的形状，其中应当令 $p(x)=\psi'(x)$；另一方面，如果函数 $\psi(x)$是"阶梯的"，这就是說，如果在基本区間中除去有限个(n 个)[1]点x_i以外，它等于常数，而在点 x_i 处，有跳躍等于

$$p_i=\psi(x_i+0)-\psi(x_i-0) \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

那么积分(16)可化成形如(13)的和式，其中应当令

$$a_i=f(x_i).$$

表达式(14)与(16)只有当 $s\neq0$ 时才有意义，但我們分别令：

$$\Delta_0(f)=\lim_{s\to0}\Delta_s(f)=e^{\int_a^b \lg f(x)p(x)dx} \tag{18}$$

或

$$\Delta_0(f)=\lim_{s\to0}\Delta_s(f)=e^{\int_a^b \lg f(x)d\psi(x)}. \tag{19}$$

我們假定在指数上的积分收斂；否則($f(x)$等于零时就有这种可能)可以在形式上取积分值为$-\infty$，或者令 $\Delta_0(f)=0$。

完全同样，如果由$f(x)=0$ 可推出(当 $s<0$ 时)公式(16)右边的积分發散，我們在形式上令 $\Delta_s(f)=0$。

用 (E) 表示在基本区間上函数 $\psi(x)$ 的**非逗留点** x 所成的集，所謂非逗留点或者是在該处 $\psi(x)$ 有跳躍的点，或者是 $\psi(x)$ 的一种連續点，但在包含它的随意小的任一区間内，$\psi(x)$ 不等于常数。显然，**集(E)是閉集**，亦即包含 (E) 中任一子点列的極限点。

我們假定函数$f(x)$在基本区間上連續，从而在閉集(E)上連續。因此它在**这个**

1) 函数 $\psi(x)$ 在某些点可能有跳躍，而且这样的点自然也可能有無穷个。但这时在任何情形下，这些点所成的集是可数的，这就是說，它們可以排成序列的形状：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

集上达到它的最小值 $\underline{\Delta}(f)$ 与最大值 $\overline{\Delta}(f)$:

$$\underline{\Delta}(f)=\min_{(E)} f(x), \quad \overline{\Delta}(f)=\max_{(E)} f(x).$$

現在要証明，对于形如(16)的平均，与有限和的性質1)—5)相似的性質还是成立.

直接由斯提叶斯积分的定义，可見

$$\underline{\Delta}(f)\leqslant\Delta_s(f)\leqslant\overline{\Delta}(f). \tag{20}$$

事实上，

$$\int_a^b f^s(x)\,d\psi(x)\leqslant\max_{(E)} f^s(x)=[\max_{(E)} f(x)]^s=[\overline{\Delta}(f)]^s,$$

由此可推得不等式(20)的第二部分；同样可推得它的第一部分.

現在証明 $\Delta_s(f)$ 是变数 s 的增[1]函数，这就是說，当 $s_1<s_2$ 时，

$$\Delta_{s_1}(f)<\Delta_{s_2}(f). \tag{21}$$

实际上，

$$\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(f)=\frac{1}{s}\frac{\int_a^b f^s(x)\lg f(x)d\psi(x)}{\int_a^b f^s(x)d\psi(x)}-\frac{1}{s^2}\lg\int_a^b f^s(x)d\psi(x)^{2)},$$

因此

$$s^2\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(f)=\frac{\int_a^b F(x)\lg F(x)d\psi(x)}{\int_a^b F(x)\,d\psi(x)}-\lg\int_a^b F(x)d\psi(x), \tag{22}$$

其中已引用記号

$$F(x)=f^s(x).$$

暫且令

$$\int_a^b F(x)d\psi(x)=F^*>0. \tag{23}$$

因为函数 $\varphi(t)=t\lg t$ 有正的二阶导数(当 $t>0$ 时)，所以

---

1) 当函数 $f(x)$ 在集(E)上至少取两个不同的値时；当积分發散时也是这样.

2) 关于 $s=0$ 的情形，容易証明可求得:

$$\frac{d}{ds}\lg\Delta_0(f)\equiv\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(f)=\frac{\int_a^b\lg^2 f(x)d\psi(x)-\left\{\int_a^b\lg f(x)d\psi(x)\right\}^2}{2}>0$$

[分子上是函数1与 $\lg f(x)$ 对于权 $\psi(x)$ 所作出的格拉姆行列式].

$$\varphi(t)\geqslant t^*\lg t^*+(t-t^*)\left[\frac{d}{dt}(t\lg t)\right]_{t=t^*}\qquad (t, t^*>0),$$

由此得

$$F(x)\lg F(x)\geqslant F^*\lg F^*+[F(x)-F^*]\left[\frac{d}{dF}(F\lg F)\right]_{F=F^*},$$

再积分，并且注意到条件(23)与(17),

$$\int_a^b F(x)\lg F(x)d\psi(x)\geqslant F^*\lg F^*,$$

亦即

$$\int_a^b F(x)\lg F(x)\,d\psi(x)\geqslant\int_a^b F(x)\,d\psi(x)\cdot\lg\int_a^b F(x)d\psi(x). \tag{24}$$

这样，回到等式(22)，就可看到

$$s^2\frac{d}{ds}\lg\Delta_s(f)\geqslant 0,$$

因此 $\Delta_s(f)$ 是 s 的不減函数．但是只有在关系式(24)中有等号时，亦即假設恒等式 $F(x)\equiv F^*$[在集 (E) 上]成立时，$\Delta_s(f)$ 才可能是平稳的．因此 $\Delta_s(f)$ 是增函数．

其次，下列等式成立：

$$\lim_{s\to\infty}\Delta_s(f)=\bar{\Delta}(f),\qquad \lim_{s\to-\infty}\Delta_s(f)=\underline{\Delta}(f). \tag{25}$$

例如我們証明其中第一个等式如下．为了簡单起見，令 $M=\bar{\Delta}(f)$，設 ξ 是集 (E) 中的一点，$f(x)$ 在这点取数值 M．因为函数 $f(x)$ 是連續的，所以無論 ε 是怎样小，可以指出一个 δ，使得当 $|x-\xi|<\delta$ 时，$f(x)>M-\varepsilon$；函数 $\psi(x)$ 在点 ξ 附近并不是平稳的，因而

$$\psi(\xi+\delta)-\psi(\xi-\delta)>0.$$

我們得到

$$\int_a^b f^s(x)\,d\psi(x)\geqslant\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^s(x)d\psi(x)>(M-\varepsilon)^s[\psi(\xi+\delta)-\psi(\xi-\delta)],$$

于是

$$\Delta_s(f)>(M-\varepsilon)[\psi(\xi+\delta)-\psi(\xi-\delta)]^{\frac{1}{s}}.$$

由此得

$$\lim_{s\to\infty}\Delta_s(f)\geqslant M-\varepsilon,$$

又因 ε 可以随意小，所以 $\lim\limits_{s\to\infty}\Delta_s(f)\geqslant M$．另一方面，我們已經看到 $\Delta_s(f)\leqslant M$．因此

$$\lim_{s\to\infty}\Delta_s(f)=M.$$

我們不証明显而易見的等式

$$\left.\begin{aligned}\Delta_s(\lambda f)&=\lambda\,\Delta_s(f),\\ \underline{\Delta}\,(\lambda f)&=\lambda\,\underline{\Delta}\,(f),\qquad(\lambda>0),\\ \overline{\Delta}\,(\lambda f)&=\lambda\,\overline{\Delta}\,(f)\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

但要証明下列不等式：

$$\Delta_s(f+g)\leqslant\Delta_s(f)+\Delta_s(g)\qquad(s\geqslant 1)^{1)},\tag{27}$$

$$\Delta_s^s(f+g)\leqslant\Delta_s^s(f)+\Delta_s^s(g)\qquad(s\leqslant 1).\tag{28}$$

令

$$\varphi(t)=\int_a^b[tf(x)+(1-t)g(x)]^s d\psi(x),$$

$$\Phi(t)\equiv\varphi^{\frac{1}{s}}(t)\equiv\Delta_s(tf+(1-t)g),$$

我們有

$$\Phi''(t)=\frac{1}{s^2}\,\varphi^{\frac{1}{s}-2}(t)[s\varphi(t)\varphi''(t)-(s-1)\varphi'^2(t)];$$

另一方面，

$$s\varphi(t)\varphi''(t)-(s-1)\varphi'^2(t)=s^2(s-1)\left\{\int_a^b F^2(x)d\Psi(x)\cdot\int_a^b G^2(x)\ d\Psi(x)-\right.$$
$$\left.-\left[\int_a^b F(x)\,G(x)d\Psi(x)\right]^2\right\},\tag{29}$$

其中引用了記号

$F(x)\equiv tf(x)+(1-t)g(x),\quad G(x)\equiv f(x)-g(x),\quad d\Psi(x)\equiv F^{s-2}(x)d\psi(x).$

由布尼亚可夫斯基不等式，当 $s\geqslant 1$ 时，公式(29)的右边是非負的；因此 $\Phi''(t)\geqslant 0$，从而

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2}.$$

因为

$$\Phi(0)=\Delta_s(g),\quad \Phi(1)=\Delta_s(f),\quad \Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Delta_s(f+g),$$

所以我們得到关系式(27)．在这个关系式中，只有在下列两种情形下才能采用等号：或者 $s=1$，或者 $G(x)$ 与 $F(x)$ 相差一常数因子，亦即 $g(x)$ 与 $f(x)$ 相差一常数因

1) 这就是所謂閔可夫斯基不等式．

子。

在不等式(27)中取 $s\to\infty$ 时的極限，就得到

$$\bar{\Delta}(f+g)\leqslant\bar{\Delta}(f)+\bar{\Delta}(g).$$

不过这个不等式也可直接从 $\bar{\Delta}$ 的定义推出。

等式(28)可以直接从公式(11)推出。

47. 函数用已給次数多項式的平均冪逼近与最好逼近 函数 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上加积分权 $\psi(x)$ 的平方逼近問題就是使积分

$$I_n^{(2)}=\int_a^b[P_n(x)-f(x)]^2d\psi(x)$$

成为極小的問題，其中 $P_n(x)$ 表示“广义多項式”

$$P_n(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),$$

函数 $\varphi_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 在所考慮的区間上連續，并且成一綫性無关的函数系。

如果要使积分

$$I_n^{(s)}=\int_a^b|P_n(x)-f(x)|^sd\psi(x) \tag{30}$$

成为極小（在这里根据問題的意义，s 是任一正数），那么这就是 s 次逼近的問題。当 $s=2$ 时，我們得到上述平方逼近的問題；当 $s=1$ 时，就得到“一次逼近”的問題；后一問題在 $\psi(x)\equiv x$ 的情形下有簡单的几何意义：在 $y=P_n(x)$ 与 $y=f(x)$ 两圖形之間的面积必須尽可能小。

利用第 46 节的記号，可以把积分(30)写成下列形状：

$$I_n^{(s)}=\Delta_s^s(|P_n-f|),$$

換句話說，令

$$R_n(x)=P_n(x)-f(x),$$

我們有

$$I_n^{(s)}=\Delta_s^s(|R_n|). \tag{31}$$

現在来解决所提出的問題，我們应当首先特別說明函数系 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 与 $f(x)$ 不是綫性無关的情形。这时下列恒等式一定成立：

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(x)+\mu f(x)=0,$$

又因根据假設，函数系 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 綫性無关，所以 $\mu\neq0$，因而上列恒等式可以写成

$$f(x)=a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\qquad\left(a_m=-\frac{\lambda_m}{\mu};\qquad m=1,2,\cdots,n\right).$$

在这种情形下，积分 $I_n^{(s)}$ 的極小值等于零，而且只有在 $c_m=a_m(m=1,2,\cdots,n)$ 时这个極小值才能达到。

如果函数 $\varphi_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 与 $f(x)$ 所組成的函数系綫性無关，那么当系数 c_k 取任何值时，差式 $P_n(x)-f(x)$［在集 (E) 上］不恒等于零，因此积分 $I_n^{(s)}$ 总是**正数**。

显然积分 $I_n^{(s)}$ 是系数 c_i 的函数：

$$I_n^{(s)}\equiv\delta_s(c_i).$$

我們剛才已經看出，

$$\delta_s(c_i)>0. \tag{32}$$

現在来証明 $\delta_s(c_i)$ 是系数 c_i 的**連續**函数。

用 L 表示适合下列条件的数

$$|\varphi_i(x)|\leqslant L \qquad (i=1,2,\cdots,n);$$

用 h_i 表示系数 c_i 的增量。

如果

$$|h_i|\leqslant\frac{\varepsilon}{nL}$$

$(i=1,2,\cdots,n;\ \varepsilon$ 是任一正数)，那么令

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i\varphi_i(x),$$

我們就有

$$|\omega(x)|\leqslant n\cdot\frac{\varepsilon}{nL}\cdot L=\varepsilon,$$

或

$$\overline{\Delta}(|\omega|)\leqslant\varepsilon;$$

由此对于任一 $s>0$，我們得到

$$\Delta_s(|\omega|)<\overline{\Delta}(|\omega|)\leqslant\varepsilon,$$

并且特别当 $0<s<1$ 时，

$$\Delta_s^s(|\omega|)<\varepsilon^s.$$

現在利用第 46 节的不等式(27)，可以断定在 $s\geqslant1$ 时，

$$[\delta_s(c_i+h_i)]^{\frac{1}{s}}=\Delta_s(|R_n+\omega|)\leqslant\Delta_s(|R_n|)+\Delta_s(|\omega|)<[\delta_s(c_i)]^{\frac{1}{s}}+\varepsilon,$$

$$[\delta_s(c_i)]^{\frac{1}{s}}=\Delta_s(|R_n+\omega-\omega|)\leqslant\Delta_s(|R_n+\omega|)+\Delta_s(|\omega|)<[\delta_s(c_i+h_i)]^{\frac{1}{s}}+\varepsilon,$$

因而

$$\left|\delta_s^{\frac{1}{s}}(c_i+h_i)-\delta_s^{\frac{1}{s}}(c_i)\right|<\varepsilon,$$

由此可見，$\delta_s^{\frac{1}{s}}(c_i)$ 是 c_i 的連續函数；于是 $\delta_s(c_i)$ 也是 c_i 的連續函数。如果 $s\leqslant 1$，那么由不等式(28)立即可得：

$$|\delta_s(c_i+h_i)-\delta_s(c_i)|<\varepsilon.$$

現在可以証明对于某一組值 c_i，$\delta_s(c_i)$ 达到它的下界 μ。假若 c_i 的变化区域是閉的，由 $\delta_s(c_i)$ 的連續性可以推得这个結論（根据一个著名的定理）。但是因为每个 c_i 可以从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，所以在这里还需要另外考虑这个問題。

首先考虑适合

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^2=1 \tag{33}$$

的那些組 c_i。

于是当

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^2=1$$

时，我們有

$$\int_a^b\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)\right|^s d\psi(x)\geqslant\mu^*>0. \tag{34}$$

現在設 c_i 是任意一組数，并且引用記号

$$K^2=\sum_{i=1}^{n}c_i^2,$$

我們就得到（当 $s\geqslant 1$ 时）

$$\delta_s^{\frac{1}{s}}(c_i)=\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i-f_i\right|\right)\geqslant\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right|\right)-\Delta_s(|f|)^{1)}=$$

$$=K\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{K}\varphi_i\right|\right)-\Delta_s(|f|).$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i}{K}\right)^2=1,$$

所以由不等式(34)可得

1) 我們利用显然可以从 $\Delta_s(f+g)\leqslant\Delta_s(f)+\Delta_s(g)$ 推出的不等式 $\Delta_s(f-g)\geqslant\Delta_s(f)-\Delta_s(g)$.

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{K}\varphi_i\right|\right)\geqslant\mu^{*\frac{1}{s}},$$

因而

$$\delta_s^{\frac{1}{s}}(c_i)\geqslant K\mu^{*\frac{1}{s}}-\Delta_s(|f|).\tag{35}$$

当 K 增加到無穷大时，不等式(35)的右边無限增大，所以它的左边也無限增大．由此可見，在求極小值 μ 时，只須考慮使得 K 不超过某一确定的数（例如，$K\leqslant\frac{\mu^{\frac{1}{s}}+\Delta_s(|f|)}{\mu^{*\frac{1}{s}}}$ 的那些組 c_i）．但是这个区域是閉的；因而 $\delta_s(c_i)$ 在这区域上可以达到極小值．

当 $0<s\leqslant 1$ 时，我們必須用不等式(28)来代替(27)，于是得到

$$\delta_s(c_i)\geqslant K^s\mu^*-\Delta_s^s(|f|),$$

由此可推出上述結論．

現在来看是否可以断定 $\delta_s(c_i)$ 只对于一組系数达到它的極小值．換句話說，是否可以断定我們的極值問題有唯一的解？設所考慮的是 $s>1$ 次的冪逼近．如果有两組值 c_i' 与 c_i'' 存在，使得

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i'\varphi_i-f\right|\right)=\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i''\varphi_i-f\right|\right)=\mu^{\frac{1}{s}},$$

而且对于所有其他的各組值 c_i，下列不等式成立：

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i-f\right|\right)\geqslant\mu^{\frac{1}{s}},$$

那么我們就得到：

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i'+c_i''}{2}\varphi_i-f\right|\right)=\frac{1}{2}\Delta_s\left[\left|\left(\sum_{i=1}^{n}c_i'\varphi_i-f\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}c_i''\varphi_i-f\right)\right|\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i'\varphi_i-f\right|\right)+\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i''\varphi_i-f\right|\right)\right]=\mu^{\frac{1}{s}},$$

而且在这里只有当

$$\sum_{i=1}^{n}c_i''\varphi_i-f\equiv C\left(\sum_{i=1}^{n}c_i'\varphi_i-f\right)$$

时才能得到等式，于是由函数系 φ_i 与 f 綫性無关，可見 $C=1$，$c_i''=c_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$．因此所求的解一定是唯一的．

下面的例子指出这个結論对于 $s=1$ 已不正确．积分

$$\int_{-1}^{+1}|x-cx^2|\,dx$$

当$|c|\leqslant 1$时有値1，当$|c|>1$时有値$\frac{2}{3}|c|+\frac{1}{3c^2}>1$．因此極小値問題的解不是唯一的．

除了使得积分$I_n^{(s)}$为極小的問題以外，还可提出使得下列数量成为極小的問題：

$$\bar{I}_n=\max_{(E)}|P_n(x)-f(x)|, \tag{36}$$

其中(E)是一閉点集[在特殊情况下，它可能就是閉区間(a,b)]，$P_n(x)$有前述意义。

用第46节的記号，我們得到

$$\bar{I}_n=\bar{\Delta}(|P_n-f|).$$

当然，我們所考虑的数量是系数c_i的函数：

$$\bar{\Delta}(|P_n-f|)=\bar{\delta}(c_i).$$

可以証明这函数是連續的，并且对于某一組c_i达到極小值。这个証明完全与以上的相仿佛：这是由于用$\Delta_s(f)(s\geqslant 1)$与用$\bar{\Delta}(f)$所記出的表达式有相同的形式性質。因此我們沒有重作証明的必要。

然而我們还要考虑在什么条件下可以断定所提出的極值問題有唯一的解。在一般情况下，解不是唯一的．为了証实此点，譬如説，可以用一种函数$\varphi(x)$逼近已給的函数$f(x)$；在$|f(x)|$达到它的極大值的点的邻域內，这种$\varphi(x)$恒等于零。

但是如果$P_n(x)$是通常(或三角)的n次多項式，那么問題的解一定是唯一的。以后我們要証明这个命題(第48节)。

注意 这里所引进的"冪"逼近法这一型式，在本質上与以前各章所考虑的型式的逼近法不同．以前型式的一切逼近法都有"綫"性：这就是說，如果$P(f,x)$与$P(g,x)$是函数$f(x)$与$g(x)$的逼近，那么$P(f+g,x)$是函数$f(x)+g(x)$的逼近．一般說来，"冪"逼近法沒有这种性質．精确地說，$s=2$次冪逼近法(亦即第三章中所討論的平方逼近法)是一种例外情形，这是两种型式的逼近法中相互交叉(如果可以这样說的話)的一种情形．

任意次数s的冪逼近法很少被研究过；已經得到的結果有些不連貫性．毫無疑义，这是由于冪逼近法的計算(除了$s=2$的情形以外)要困难得多，因而它只有有限的实际意义1)．我們認为在这里向讀者介紹这种冪逼近法是有益处的，因为它們可以用某种形式使一大类不同的逼近法系統化，而且形成一个連續的鍊条，平方逼近法是其中一个环节，契比謝夫的一致("最好")逼近法(本章的基本研究对象)在鍊条的一端．

現在来看关于冪逼近法以及一致逼近法的無穷过程这一方面的問題。

設已給無穷函数序列

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots, \tag{37}$$

假定这些函数是在区間(a,b)上給出的連續函数；設無論数n是怎样大，函数系$\varphi_i(x)$

1) 可是我們指出，关于$s=1$的最好冪逼近問題的若干結果是与 А. А. Марков、А. Н. Коркин 以及 Е. И. Золотарев 的名字联系着的．在这方面，請参看 Н. И. Ахиезер 的专著[1](第89—101頁)．

$(i=1,2,\cdots,n)$在这区間上綫性無关。另一方面，設$f(x)$也是在基本区間上給出的連續函数。可能对于某一指标n以及若干系数$c_i(i=1,2,\cdots,n)$，下列恒等式成立：

$$f(x)\equiv c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x).$$

要这个恒等式成立，必須而且只須$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$与$f(x)$所組成的函数系不是綫性無关的；于是显然对于所有比$n$大的指标也是这样。

不考虑剛才所說的情形，对于任一n，我們提出使下列表达式成为極小的問題：

$$I^{(n)}\equiv\delta^{(n)}(c_i)\equiv\Delta^s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i-f\right|\right).$$

把符号Δ看作$\Delta_s(s>0)$或$\overline{\Delta}$，于是我們同时考虑到冪逼近法与一致逼近法。我們已經看到，当选取次数为$s>1$的冪偏差时，系数c_i是唯一地确定的。把μ_n表示函数$f(x)$用函数系$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的最好逼近，亦即表达式$\delta^{(n)}(c_i)$的極小值；那么对于任意的$c_i$，有不等式

$$\delta^{(n)}(c_i)\geqslant\mu_n,$$

而且至少对于一組c_i的值可以得到等式：

$$\delta^{(n)}(c_i^{(n)})=\mu_n.$$

容易明白，数$\mu_n(n=1,2,\cdots,n)$成一不增序列：

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\geqslant\cdots. \tag{38}$$

事实上，我們要对于一类函数求表达式$I^{(n)}$的極小值；在从n次"多項式"轉到$n+1$次"多項式"时，我們扩大了这类函数，因此这时極小值本身不会增大。

形式的証明是这样作出的：根据数μ_n+1的定义，对于任一組c_i的值，下列不等式成立：

$$\delta^{(n+1)}(c_1,c_2,\cdots,c_n,c_{n+1})\geqslant\mu_{n+1};$$

因此，特别有

$$\delta^{(n+1)}(c_1^{(n)},c_2^{(n)},\cdots,c_n^{(n)},0)\geqslant\mu_{n+1}.$$

但是显然

$$\delta^{(n+1)}(c_1^{(n)},c_2^{(n)},\cdots,c_n^{(n)},0)=\delta^{(n)}(c_1^{(n)},c_2^{(n)},\cdots,c_n^{(n)})=\mu_n,$$

由此得到

$$\mu_n\geqslant\mu_{n+1}. \tag{38'}$$

不考虑上面討論过的这种情形：从某一指标n开始，函数系$\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$f(x)$不是綫性無关的，亦即从某一数值n开始，所有的数μ_n都等于零。我們設所有的μ_n都是正数。

用 μ 表示它們的極限：

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n.$$

显然，

$$\mu\geqslant 0. \tag{39}$$

依照 $\mu=0$ 或 $\mu>0$ 我們說可能或不可能在基本区間上用序列 $\varphi_i(x)$ 来逼近函数 $f(x)$. 如果在基本区間上可以用函数序列 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots)$ 来逼近任何連續函数，那么我們說这个函数序列是閉合的.

当然，一般說来，函数逼近的可能性以及函数序列的閉合性与所取的逼近的型式有关. 不过我們指出下列一般的原理.

1) 用同一积分权 $\psi(x)$ 与不同的次数 s 及 s' (其中 $s<s'$) 作出偏差时，如果在次数 s' 的情形下可以用已給的函数系来逼近函数 $f(x)$，那么在次数 s 的情形下也是这样.

事实上，設 $\delta_s^{(n)}(c_i)$ 与 $\delta_{s'}^{(n)}(c_i)$ 表示积分(看作系数的函数)

$$\Delta_s^s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i-f\right|\right) \qquad 与 \qquad \Delta_{s'}^{s'}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i-f\right|\right);$$

設 $c_i^{(n)}$ 及 $c_i'^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 表示与表达式 $\delta_s^{(n)}$ 及 $\delta_{s'}^{(n)}$ 的極小值相对应的系数值，μ_n 及 μ'_n 表示这些極小值. 那么我們就得到：

$$\delta_s^{(n)}(c_i^{(n)})=\mu_n, \qquad \delta_{s'}^{(n)}(c_i'^{(n)})=\mu';$$

另一方面，根据第 46 节的不等式(21)，

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i'^{(n)}\varphi_i-f\right|\right)\leqslant\Delta_{s'}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_i'^{(n)}\varphi_i-f\right|\right),$$

亦即

$$[\delta_s^{(n)}(c_i'^{(n)})]^{\frac{1}{s}}\leqslant[\delta_{s'}^{(n)}(c_i'^{(n)})]^{\frac{1}{s'}},$$

又因

$$\delta_s^{(n)}(c_i^{(n)})\leqslant\delta_s^{(n)}(c_i'^{(n)}),$$

由此得

$$\mu_n=\delta_s^{(n)}(c_i^{(n)})\leqslant\delta_s^{(n)}(c_i'^{(n)})\leqslant[\delta_{s'}^{(n)}(c_i'^{(n)})]^{\frac{s}{s'}}=\mu_n'^{\frac{s}{s'}}.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu'_n=0$，那么显然也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$.

2) 如果可以用已給的函数系来一致逼近一个函数，那么也可以在加任何权的任何幂偏差的意义下来逼近这个函数.

設 $\overline{\delta}^{(n)}(c_i)$ 表示 c_i 的函数

$$\overline{\Delta}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i - f\right|\right),$$

同样，$\delta_s^{(n)}(c_i)$ 表示 c_i 的函数

$$\Delta_s\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i - f\right|\right),$$

$\overline{\mu}_n$ 与 μ_n 分别表示它們的極小值，并且設在数值 $\overline{c}_i^{(n)}$ 与 $c_i^{(n)}$ 处分别达到这些極小值。

于是利用关系式(20)，我們得到

$$\delta_s^{(n)}(c_i^{(n)}) \leqslant \overline{\delta}^{(n)}(c_i^{(n)}),$$

因此

$$\mu_n \leqslant \overline{\mu}_n^s,$$

从这里就可得到我們的結論。

下列命題是定理 1 及 2 的推論：

1) 在取同一权时，如果已給函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots)$ 对于次数 s 是閉合的，那么它对于任何較低的次数也是閉合的。

2) 如果函数系 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots)$ 在一致逼近的意义下是閉合的，那么它在任何次冪逼近的意义下也是閉合的。

应用本节中所引用的术語，可以把維尔斯徳拉斯定理 1 及 2 概括并改述如下：

定理 1. 由自变数的正整次冪所組成的函数系

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$$

在任何有限区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上依一致逼近(因而依任何次冪逼近)的意义是閉合的。

定理 2. 由函数

$$\begin{cases} 1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots \\ \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots \end{cases}$$

所組成的函数系 1) 依一致逼近(因而依任何次冪逼近)的意义在任一长度小于 2π 的区間上是閉合的；2) 依任何次冪逼近的意义在任一长度等于 2π 的区間上是閉合的。对于上述斷語的簡单証明，在这里沒有作出的必要。

48. 契比謝夫所指出的最好逼近的条件　我們約定：使得表达式

$$\overline{\Delta} = \max_{(E)} \left|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x) - f(x)\right| \tag{40}$$

成为極小的函数逼近法称为一致或最好逼近法(参看第 47 节，第 219 面上的記号)。

已經証明(第 47 节)，如果 $f(x)$ 是已給的連續函数，$\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是連續及綫性無关的函数系，那么存在着与所求的極小相对应的系数值 c_i $(i=1,2,\cdots,n)$。我們已經看到，在一般情形下，問題的解不是唯一的。

不難証明，如果引进比較一般型式的表达式

$$\overline{\Delta}_q=\max_{(E)} q(x)\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)-f(x)\right| \tag{41}$$

作为 Δ，上述結論还是正确，在这里"权" $q(x)$ 是在集 (E) 上滿足形如

$$0<m\leqslant q(x)\leqslant M \tag{42}$$

的不等式的連續正函数。

一致逼近的計算問題比平方逼近的計算困難得多。

現在設函数系 $\varphi_i(x)$ 是由冪函数 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 構成的，这就是考慮用通常的多項式的逼近問題。同时我們只考慮集 (E) 化为閉区間的情形，并且不失一般性，可以設这个区間就是 $-1\leqslant x\leqslant +1$。

契比謝夫[2]在首先提出了"最好"一致逼近的問題后，指出了一个次数不高于 n 的多項式 $P(x)$ 可以給出已給函数 $f(x)$ 的最好一致逼近的必要与充分条件，即："加权"差

$$R(x)\equiv q(x)[f(x)-P(x)]$$

在区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上以正負交錯的符号达到它的最大模

$$L\equiv \max_{-1\leqslant x\leqslant +1} q(x)\,|f(x)-P(x)|$$

至少 $n+2$ 次。換句話說，一定有 $n+2$ 个点 x_i：

$$-1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}<x_{n+2}\leqslant +1, \tag{43}$$

具有下列性質：

$$R(x_i)=(-1)^i\varepsilon L \qquad (\varepsilon=+1\text{ 或 }-1;\qquad i=1,2,\cdots,n+2). \tag{44}$$

首先証明契比謝夫条件是必要的。我們要找出滿足条件(43)与(44)的点 x_i。設已經找到了多項式 $P(x)$。用 $(\overset{+}{E})\equiv(E_1)$ 表示使得 $R(x)=+L$ 的点 x 所成的集，用 $(\overline{E})\equiv(E_2)$ 表示使得 $R(x)=-L$ 的点 x 所成的集。显然，这两个集都是閉集。我們注意到任何閉集含有第一点与第末点（亦即其中的最小数与最大数）。不失一般性，可以設 $(\overline{E})$ 的第一点在 $(\overset{+}{E})$ 的第一点的左方。設 x_1 是 $(\overline{E})$ 的第一点，x_2 是 $(\overset{+}{E})$ 的第一点，而且 $-1\leqslant x_1<x_2$。設 (E_3) 是屬于 $(\overline{E})$ 并且滿足不等式 $x>x_2$ 的点 x 所成的集，因为 (E_3) 是閉集，所以它有第一点 x_3，而且 $x_3>x_2$。設 (E_4) 是屬于 $(\overset{+}{E})$ 并且滿足不等

式 $x>x_3$ 的点 x 所成的集。因为 (E_4) 是閉集，所以它有第一点 x_4，而且 $x_4>x_3$。

当集 (E_i) 还不是空集时，像这样繼續做下去，我們就得到滿足下列条件的点 x_i $(i=1,2,\cdots)$：

$$-1\leqslant x_1<x_2<\cdots<1,\qquad R(x_i)=(-1)^iL\qquad (i=1,2,\cdots).$$

这样做一定有終止的时候：事实上，如果集 (E_i) 中任一集都不是空集，那么滿足条件(44)的点 x_i 就有無穷个；于是有極限 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant 1$，又因函数 $R(x)$ 在 ξ 的邻域內取数值 $+L$ 与 $-L$，所以它不可能在这点連續。因此，我們設 x_m 是点 x_i 中的最后一点：

$$-1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 1,\qquad R(x_i)=(-1)^iL\qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

应当証明

$$m\geqslant n+2. \tag{45}$$

反之，假定

$$m\leqslant n+1. \tag{46}$$

用 x_1' 表示屬于 $(\overline{E})$ 并且滿足不等式 $x<x_2$ 的点 x 所成的集中第末点，用 x_2' 表示屬于 $(\overset{+}{E})$ 并且滿足不等式 $x<x_3$ 的点 x 所成的集中第末点，等等。容易看出

$$-1\leqslant x_1\leqslant x_1'<x_2\leqslant x_2'<x_3\leqslant x_3'<\cdots<x_m\leqslant x_m'\leqslant 1.$$

用 $(\overline{I})$ 表示

$$x_1\leqslant x\leqslant x_1',\qquad x_3\leqslant x\leqslant x_3'$$

等区間所成的集，用 $(\overset{+}{I})$ 表示

$$x_2\leqslant x\leqslant x_2',\qquad x_4\leqslant x\leqslant x_4'$$

等区間所成的集，最后，用 (I) 表示在基本区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上、但不屬于 $(\overset{+}{I})$ 与 $(\overline{I})$ 的一切点所成的集。显然 $R(x)$ 在 $(\overset{+}{I})$ 上不达到数值 $-L$，在 $(\overline{I})$ 上不达到数值 $+L$，在 (I) 上既不达到数值 $+L$，也不达到数值 $-L$。

令

$$\alpha_i=\frac{x_i'+x_{i+1}}{2}\qquad (i=1,2,\cdots,m-1),$$

其次，令

$$x_i^{*\prime}=\frac{x_i'+\alpha_i}{2},\qquad x_{i+1}^{*}=\frac{\alpha_i+x_{i+1}}{2}\qquad (i=1,2,\cdots,m-1),$$

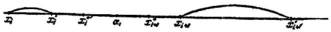


图 23

$$x_1^* = -1, \qquad x_m^{*\prime} = +1$$

(圖 23)；用$(\bar{I}^*)$表示区間

$$x_1^* \leqslant x \leqslant x_1^{*\prime}, \qquad x_3^* \leqslant x \leqslant x_3^{*\prime}, \cdots$$

所成的集，用$(\overset{+}{I}{}^*)$表示区間

$$x_2^* \leqslant x \leqslant x_2^{*\prime}, \qquad x_4^* \leqslant x \leqslant x_4^{*\prime}, \cdots$$

所成的集，用(I^*)表示在基本区間$-1 \leqslant x \leqslant +1$上、但不屬于$(\overset{+}{I}{}^*)$与$(\bar{I}^*)$的一切点所成的集。

在$(\bar{I}^*)$中的区間上，$R(x)$不达到数值$+L$；設L_1是$R(x)$在$(\bar{I}^*)$上的最大值$(L_1 < L)$。在$(\overset{+}{I}{}^*)$中的区間上，$R(x)$不达到数值$-L$；設$-L_2$是$R(x)$在$(\overset{+}{I}{}^*)$上的最小值$(L_2 < L)$。最后，在(I^*)中的区間上，$R(x)$既不达到数值$+L$，又不达到数值$-L$；設L_3是$|R(x)|$在(I^*)上的上界$(L_3 < L)$。

用L'表示L_1, L_2, L_3中最大一数$(L' < L)$。我們得到：

$$\left.\begin{array}{ll} -L \leqslant R(x) \leqslant L' & [\text{对于}(\bar{I}^*)\text{中的区間}], \\ -L' \leqslant R(x) \leqslant L & [\text{对于}(\overset{+}{I}{}^*)\text{中的区間}], \\ -L' \leqslant R(x) \leqslant L' & [\text{对于}(I^*)\text{中的区間}]. \end{array}\right\} \tag{47}$$

現在考慮下列$m-1$次多項式

$$S(x) = \lambda \prod_{i=1}^{m-1} (a_i - x),$$

其中λ是一个在下面确定的正的常数。

不难看出，$S(x)$在$(\bar{I}^*)$中的区間上取正值，在$(\overset{+}{I}{}^*)$中的区間上取負值。另一方面，用μ表示$\left|\prod_{i=1}^{m-1}(a_i - x)\right|$在基本区間上的極大值，对于基本区間上所有的值$x$，我們有

$$|S(x)| \leqslant \lambda\mu,$$

从而根据不等式 (42) 可得

$$q(x)\,|S(x)| \leqslant \lambda\mu M.$$

选取λ，使得

$$\lambda\mu M < L - L'.$$

于是得到：

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < q(x)\,S(x) < L - L' & [\text{对于}(\bar{I}^*)\text{中的区間}], \\ -(L - L') < q(x)\,S(x) < 0 & [\text{对于}(\overset{+}{I}{}^*)\text{中的区間}], \\ -(L - L') < q(x)\,S(x) < L - L' & [\text{对于}(I^*)\text{中的区間}]. \end{array}\right\} \tag{48}$$

把(47)与(48)中的不等式相加，無例外地对于基本区間上一切数値 x，我們得到

$$-L<R(x)+q(x)S(x)=q(x)[f(x)-P(x)+S(x)]<L.$$

这样，次数不超过 n [根据(46)]的多項式 $P(x)-S(x)$ 可以給出比 $P(x)$ 更好的逼近．而这与所設相矛盾．于是不等式(46)一定不能成立．

証明契比謝夫条件的充分性要比較簡单得多．

事实上，設 $P(x)$ 是这样的 n 次多項式：它使得

$$R(x)\equiv q(x)[f(x)-P(x)]$$

滿足条件(44)，而且(43)也成立；我們假定 L 是 $|R(x)|$ 的極大值．

假定另外还有一个 n 次多項式 $Q(x)$，它适合

$$q(x)|f(x)-Q(x)|\leqslant L. \tag{49}$$

考虑差式

$$D(x)\equiv q(x)[f(x)-P(x)]-q(x)[f(x)-Q(x)]\equiv q(x)[Q(x)-P(x)].$$

由公式(44)与(49)，在点 x_i，下列不等式成立：

$$(-1)^i\varepsilon D(x_i)\geqslant 0; \tag{50}$$

但因 $q(x)>0$，所以不等式(50)可化为

$$(-1)^i\varepsilon[Q(x_i)-P(x_i)]\geqslant 0.$$

令

$$S(x)\equiv\varepsilon[Q(x)-P(x)],$$

可見次数不高于 n 的多項式 $S(x)$ 滿足条件

$$(-1)^iS(x_i)\geqslant 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n+2).$$

由此推得 $S(x)$ 至少有 $n+1$ 个零点，因而 $S(x)\equiv 0$，亦即 $Q(x)\equiv P(x)$，这就是需要証明的．于是順便可以看出，用已給次数的多項式，函数的最好一致逼近問題有唯一的解．

我們还用另一种討論的方法来导出这个結論．設 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是两个不同的逼近多項式，它們适合

$$|f(x)-P(x)|\leqslant L, \qquad |f(x)-Q(x)|\leqslant L. \tag{51}$$

于是显然我們也可得到：

$$\left|f(x)-\frac{P(x)+Q(x)}{2}\right|\leqslant L, \tag{52}$$

因而

$$R(x)\equiv\frac{P(x)+Q(x)}{2}$$

也是逼近多項式．在不等式 (52) 中，一定至少在 $n+2$ 点处达到等号；这只有在下述条件下才是可能：在不等式 (51) 中，在这些点也可达到等号，而且差式 $f(x)-P(x)$ 与 $f(x)-Q(x)$ 在这些点有相同的符号。于是在这 $n+2$ 个点，等式 $P(x)=Q(x)$ 一定成立，从而 $P(x)\equiv Q(x)$．

对于已給次数的三角多項式，也可提出并解决最好一致逼近的問題．这时，基本区間或者是一个长度比周期 2π 小的区間，或者是整个周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，但在后一种情形下，我們要設已給函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，并且是到处連續的函数；对于权 $q(x)$ 也要作同样的假定，而且还要假設条件

$$0<m\leqslant q(x)\leqslant M$$

在基本区間上成立。

根据第 47 节中的結果，必須設已肯定地解决与已給函数 $f(x)$ 在基本区間上相差最小的 n 次三角多項式

$$T(x)=a_0+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

的存在問題，亦即使表达式

$$L=\max q(x)|f(x)-T(x)|$$

成为極小的 n 次三角多項式 $T(x)$ 的存在問題．

必要与充分的契比謝夫条件也可推广到三角多項式的情形，其形式为：加权差式

$$R(x)\equiv q(x)[f(x)-T(x)]$$

必須在所考慮的区間上以正負交錯的符号达到它的最大模至少 $2n+2$ 次．

証明与以上所作的完全相仿．我們只指出推理中的若干細节[1]．（用反証法）証明偏差点的个数 m 不可能小于 $2n+2$ 的必要性时，我們反过来設

$$m\leqslant 2n+1. \tag{53}$$

在基本区間小于周期 2π 的情形下，从偏差点中选取 $m-1$ $(m-1\leqslant 2n)$ 个点 α_i $(i=1,2,\cdots,m-1)$，并且（如果 $m-1$ 是奇数）还补充不屬于基本区間的一点 α_m；在基本区間是一整周期的情形下，偏差点的个数 m 显然不可能是奇数，因而不等式 (53) 可以換写如下：

$$m\leqslant 2n; \tag{54}$$

这 m 个偏差点在一周期上确定出 m $(m\leqslant 2n)$ 个区間，从其中每个区間中取出一点 α_i

1) 为了叙述簡便起見，在这里以及以后 $R(x)$ 取数值 εL ($\varepsilon=+1$ 或 -1) 的点所成的任何点集如果其中各点之間沒有 $R(x)$ 取数値 $-\varepsilon L$ 的点，那么我們把这点集算作只含一点．

$(i=1,2,\cdots,m)$. 因此在两种情形下，m 都是偶数，然后与以前一样，作出有零点 α_i 并且次数$\leqslant n$ 的一个三角多項式

$$S(x)=\varepsilon\lambda\prod_{i=1}^{m}\sin\frac{x-\alpha_i}{2}\qquad(\varepsilon=\pm1).$$

証明契比謝夫条件的充分性时，我們要用到这个事实：在一周期的范圍內，n 次三角多項式不可能有 $2n+1$ 个以上的根.

49. 計算最好逼近的例子 应用以上所講的契比謝夫条件，与已給函数$f(x)$相差最小的 n 次多項式 $P(x)$ 的求法，可以化为解方程組. 事实上，設函数 $f(x)$ 与 $P(x)$ 在所考虑的区間上可微分，并且与以前一样，用 x_i 表示这样的点，在点 x_i处，

$$R(x)\equiv q(x)[f(x)-P(x)]$$

以正負交錯的符号达到它的最大模 L；我們可以看到，含 $2n+4$ 个自变数

$$\varepsilon L,\qquad x_i,\qquad c_j\qquad(i=1,2,\cdots,n+2;\ j=0,1,\cdots,n)$$

的 $2n+4$ 个方程組

$$R(x_i)=(-1)^i\varepsilon L,\qquad R'(x_i)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n+2)\tag{55}$$

必須被滿足，其中

$$P(x)=\sum_0^n c_jx^j\ ^{1)}.$$

根据在第 47 节中已証明的定理，方程組(55)一定有实数解.

但是看来在最簡单的問題中，直接解方程組(55)已經有很大的困难.

因此通常要找出巧妙的方法来求已給函数的最好逼近.

在这里我們要研究契比謝夫用他的多項式(参看第 4 节)所解决的几个問題.

能求出初等函数的“有限形状的”最好逼近多項式这种情形，已知的例子不多.

除了以后所举的例子以外，我們指出：

1) П. Л. 契比謝夫在他的基本論文中找出了形如

$$\frac{Ax^n+\cdots}{p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_n},$$

并且与零相差最小的函数，其中 A 是已給的；当分母中的系数已經給定时，只須确定分子中次数小于 n 的各項(用虚点表示)的系数，否則还要确定分母中的系数.

2) 契比謝夫的学生 Е. И. 卓罗丹略夫用椭圓函数(与契比謝夫用三角函数一样)作出与零相差最小的多項式，不过他事先給定次数最高的两項的系数.

3) 近来 Н. И. 阿希哲 [1] 在相近的方向上解决了一系列类似的問題，而且除了椭圓函数以

1) 可能有一两个 x_i 在基本区間的两端. 这时自变数的个数就减少一两个. 同时方程的个数也减少一两个，因为对于在区間端点的極值，$R(x)$ 的导数不一定等于零.

外，他也用到了自守函数.

当多項式的次数無限增大时，对于很多例子，可以漸近地計算出逼近多項式(以及最好逼近). 在这方面，充分完滿的結果基本上是由 C. H. 伯恩斯坦得到的.

例 1. 在最高次項系数 A 已經給定的一切 n 次多項式

$$R(x)=Ax^n+\cdots$$

中，选出一个在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上与零相差最小的多項式.

換句話說，我們要使得 $\max\limits_{|x|\leqslant 1}|R(x)|$ 尽可能地小.

求函数 $f(x)=Ax^n$ 用 $n-1$ 次多項式的最好逼近的問題，显然与这里提出的問題等价. 根據一般的理論，偏差必須以正負交錯的符号在 $n+1$ 点达到最大模.

多項式

$$R(x)=\frac{A}{2^{n-1}}T_n(x)=\frac{A}{2^{n-1}}\cos n\arccos x \tag{56}$$

恰好滿足这个条件. 事实上，在点

$$x_i=\cos\frac{(n-i)\pi}{n}\qquad(i=0,1,\cdots,n),$$

我們得到

$$R(x_i)=(-1)^{n+i}\frac{A}{2^{n-1}}.$$

与零的最小偏差显然等于

$$L=\frac{A}{2^{n-1}}.$$

契比謝夫用来求得公式(56)的巧妙方法，是很值得注意的. 因为 $R'(x)$ 是 $n-1$ 次多項式，所以方程 $R'(x)=0$ 的根的个数等于 $n-1$，由此可見，有两个偏差点在区間的端点：

$$x_0=-1,\qquad x_n=+1.$$

$2n$ 次多項式

$$L^2-R^2(x)$$

与

$$(1-x^2)R'^2(x)$$

有同样的根，就是单根 $+1$, -1 与二重根 x_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$. 因此这两多項式只相差一个常数因子，而且这个因子在比較多項式的最高次項的系数后就可确定. 事实上，

$$L^2-R^2(x)=-A^2x^{2n}+\cdots,\qquad(1-x^2)R'^2(x)=-n^2A^2x^{2n}+\cdots,$$

因而

$$n^2(L^2-R^2(x))=(1-x^2)R'^2(x).$$

这是一个一阶微分方程，其一般积分的形状是

$$R(x)=L\cos(n\arccos x+C). \tag{57}$$

容易証明 $R(x)$ 只有在 $C=0$ 时是多项式．然后选取 L 使得其最高次項的系数等于 A，我們就得到公式(56)．

附注． 請注意可以怎样作出方程 (57) 所确定的函数 $R(x)$ 的圖形，这样是有益处的．在底为 2π、高为 $2L$ 的矩形上画出振幅为 L、周期为 $\frac{2\pi}{n}$ 的正弦曲綫；然后把矩形的側边粘起来，我們就得到一个圓柱；最后，把圓柱上所画出的空間曲綫垂直投影到与圓柱的軸相平行的平面上．

例 2． 从在点 ξ ($\xi>1$ 或 $\xi<-1$) 取数值 η 的一切 n 次多项式 $R(x)$ 中，选出在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上与零相差最小的多项式．

所求的多项式的形状是

$$R(x)=\eta+(x-\xi)Q(x),$$

其中 $Q(x)$ 是 $n-1$ 次多项式．我們要使得

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\eta+(x-\xi)Q(x)|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x-\xi|\cdot\left|\frac{\eta}{x-\xi}+Q(x)\right|$$

成为極小．可以看到，这个問題包括在第 48 节中的一般理論内；事实上，我們就是要对于权 $q(x)=|x-\xi|$，求出函数 $\frac{\eta}{x-\xi}$ 用 $n-1$ 次多项式的最好逼近．由此可見，多项式 $R(x)$ 必須以正負交錯的符号在 $n+1$ 个点达到它的最大模，因而这个問題与前一問題的解只相差一个常数因子．利用条件 $R(\xi)=\eta$，我們得到

$$R(x)=\eta\frac{T_n(x)}{T_n(\xi)}=\eta\frac{\cos n\arccos x}{\cos n\arccos\xi};\tag{58}$$

所求的偏差的極大值等于

$$L=\frac{\eta}{|\cos n\arccos\xi|}.$$

我們也可直接証明由关系式(58)所确定的多项式 $R(x)$ 就是問題的解．事实上，如果有另一次数 $\leqslant n$ 的多项式，譬如說 $R_1(x)$ 在点 ξ 也取数值 η，而且在上述区間上与零相差不超过 L，那么 (n 次) 多项式

$$S(x)\equiv R(x)-R_1(x)$$

应当滿足不等式

$$(-1)^{n+i}S(x_i)\geqslant 0\qquad(i=0,1,\cdots,n)$$

与等式

$$S(\xi)=0,$$

由此可推得

$$S(x)\equiv 0,$$

亦即

$$R_1(x)\equiv R(x).$$

由例 2 的解可推得

系 1． 如果 n 次多项式 $P(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上滿足不等式

$$|P(x)|\leqslant L,$$

那么在实轴上这区間以外的一切点，它满足不等式

$$|P(x)|\leqslant L|\cos n\arccos x|=\frac{L}{2}|(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n|.$$

由例1的解（或由系1）可推得

系 2. 如果n次多項式$P(x)$在区間$-1\leqslant x\leqslant+1$上满足不等式

$$|P(x)|\leqslant L,$$

那么它的最高次項的系数A有界如下：

$$|A|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{P(x)}{x^n}\right|\leqslant 2^{n-1}\cdot L.$$

例 3. 从形如

$$R(x)\equiv A\cos nx+B\sin nx+\cdots$$

的一切n次三角多項式中(A与B是給定的数，$A^2+B^2\neq 0$)，选出在周期$-\pi\leqslant x\leqslant+\pi$上与零相差最小的多項式．

我們要确定次数$<n$的各項系数，这些系数应該为零，因此所求的多項式化为$A\cos nx+B\sin nx$．

事实上，我們要用$n-1$次的三角多項式逼近函数$A\cos nx+B\sin nx$．根据契比謝夫条件，一定要有$2(n-1)+2=2n$个偏差点．但函数$A\cos nx+B\sin nx$恰好有这个性質．因此逼近多項式为零．

例 4. 設已給区間$E(-\alpha\leqslant x\leqslant+\alpha)$，$0<\alpha<\pi$．从次数$\leqslant n$、并且在点$\xi$取数值$\eta$的一切三角多項式中，选出在区間$E$上与零相差最小的三角多項式．

設$T(x)$是所求的多項式，L是它在区間(E)上的最大模．我們只須选取$T(x)$，使得它在区間(E)上取数值$+L$及$-L$(其符号依次改变)$2n+1$次，而且当然还应适合补充条件$T(\xi)=\eta$．这种多項式至多只有一个．实际上，假若还有另一次数$\leqslant n$的多項式$T_1(x)$满足条件$T_1(\xi)=\eta$，并且在(E)上有不大于L的最大模，那么多項式

$$U(x)=T(x)-T_1(x)$$

在一个周期上的零点不少于$2n+1$个，这就是說，它应当恒等于零．

設有滿足所提出的条件的多項式存在．可以断言有两个偏差点在区間(E)的端点：$x=\pm\alpha$．事实上，首先假若所有$2n+1$个偏差点都是內点，那么(n次)多項式$T'(x)$的根应多于$2n$个，然而这是不可能的．其次，假若有$2n$个偏差点是內点，只有一个在端点，那么导数的零点数与它的次数不相应，因为在区間(E)的范圍內，$T'(x)$在某一点β等于零．因此有$2n-1$个偏差內点．

現在考慮$2n+1$次多項式：

$$[1-\cos(x-\beta)][L^2-T^2(x)] \tag{59}$$

与

$$(\cos x-\cos\alpha)T'^2(x).$$

它們在一个周期上有相同的零点，即：$2n-1$ 个是內偏差点的(二重)零点，二重零点 β，以及簡单零点 $+\alpha$ 与 $-\alpha$；总共有

$$2(2n-1)+2\cdot 1+2=4n+2$$

个零点．因此(59)中两多项式只相差一常数因子．比較 $\cos(2n+1)x$ 及 $\sin(2n+1)x$ 的系数，我們可以确定这个因子，同时可以証明 $\beta=\pi$．于是

$$n^2(1+\cos x)[L^2-T^2(x)]=(\cos x-\cos\alpha)T'^2(x).$$

分离变数并且积分，可得

$$\frac{dT}{\sqrt{L^2-T^2}}=n\sqrt{\frac{\cos x+1}{\cos x-\cos\alpha}}\,dx,$$

$$\arccos\frac{T}{L}=n\int\sqrt{\frac{\cos x+1}{\cos x-\cos\alpha}}\,dx=n\arccos\frac{\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+C.$$

于是

$$T=L\cos\left(n\arccos\frac{\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+C\right).$$

求得的函数只有当 $C=0$ 时是三角多项式；因此

$$T(x)=L\cos n\arccos\frac{\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{60}$$

不难証明，如果 x 从 $-\alpha$ 增加到 $+\alpha$，那么在余弦記号后的表达式从 $-n\pi$ 增加到 $+n\pi$，因而 $T(x)$ 以正負交錯的符号达到它的最大模 $2n+1$ 次．这样，为了最后解决問題，还只須根据条件

$$T(\xi)=\eta$$

选取 L，而这总是可以做到的(因为 $\alpha<|\xi|\leqslant\pi$)．

系． *如果一个 n 次三角多項式 $T(x)$，在区間 $2k\pi-\alpha\leqslant x\leqslant 2k\pi+\alpha$ 上($0<\alpha<\pi$)滿足不等式*

$$|T(x)|\leqslant L,$$

那么它在这些区間以外滿足不等式

$$|T(x)|\leqslant L\left|\cos n\arccos\frac{\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right|=$$

$$=\frac{L}{2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}}\Big[\Big(\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)(\cos x-1)}\Big)^n+$$

$$+\Big(\cos x-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)(\cos x-1)}\Big)^n\Big].$$

当 $x=(2k+1)\pi$ 时，我們得到 $|T(x)|$ 在这些条件下一般可能取得的最大值；它等于

$$\frac{L}{2}\left(\operatorname{tg}^{2n}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{ctg}^{2n}\frac{\alpha}{4}\right).$$

例 5. 設 a 是一个比 1 大的实数，計算用 n 次多項式，函数

$$f(x)=\frac{1}{x-a}$$

在区間 $(-1,+1)$ 上的最好逼近。

我們必須选出 n 次多項式 $P_n(x)$，使得差式

$$R_n(x)\equiv\frac{1}{x-a}-P_n(x)$$

在区間 $(-1,+1)$ 上以正負交錯的符号达到它的最大模至少 $n+2$ 次。

可以証明 $R_n(x)$ 是由下列公式确定的：

$$R_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}+$$

$$+\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n[ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

事实上，在分子中有 $n+1$ 次多項式，又因

$$\lim_{x\to a}(x-a)R_n(x)=1,$$

由此可推得

$$\frac{1}{x-a}-R_n(x)$$

实际上是 n 次多項式。另一方面，令

$$x=\cos\theta,\qquad \sqrt{1-x^2}=\sin\theta,$$

$$\frac{ax-1}{x-a}=\cos\psi,\qquad \frac{\sqrt{(1-x^2)(a^2-1)}}{x-a}=\sin\psi,$$

因而可得

$$R_n(x)=L_n\cos(n\theta+\psi),$$

在这里

$$L_n=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

当 x 从 -1 增加到 $+1$ 时，θ 从 π 减小到零，ψ 从 0 减小到 $-\pi$。但是在这种情形下，显然 $R_n(x)$ 在基本区間上以正負交錯的符号达到它的最大模 L_n 恰好 $n+2$ 次。

于是根据契比謝夫定理，我們所求的函数的最好逼近等于

$$L_n=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

例 6. 从形如

$$T(x)=a\cos x+b\sin x$$

的三角多項式中，选出在区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上与 1 相差最小的三角多項式，在这里 $\beta-\alpha<\pi$.

用字母 L 表示誤差，显然我們一定有：

$$1-T(\alpha)\equiv1-(a\cos\alpha+b\sin\alpha)=L,$$

$$T\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-1\equiv a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-1=L,$$

$$1-T(\beta)\equiv1-(a\cos\beta+b\sin\beta)=L.$$

解这三个含 a, b 与 L 的方程，我們得到

$$L=\mathrm{tg}^2\frac{\beta-\alpha}{4},$$

$$a=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta-\alpha}{4}},\qquad b=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta-\alpha}{4}},$$

从而

$$T(x)=\frac{\cos\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\beta-\alpha}{4}}.$$

值得注意：契比謝夫不放过实际应用他的逼近方法的机会. 以下就是这种应用的一个例子.

例 7. 契比謝夫近似地确定地面距离的法則(1869 年历書，第 128 面，科学院出版局出版)：

"1) 把两地的經度差及緯度差用分表示出来；

2) 用 2 乘緯度差；

3) 在經度差及两倍緯度差这两数字中，用 3 乘較小一数，用 7 乘較大一数，然后把这两乘积相加；

4) 用 8 除和数，就得到所求距离的俄里数字."

用 Δu 及 Δv 表示用分表示出的經度差及緯度差；可以看出，用这法則求距离 Δs 的公式是：

$$\Delta s\approx\begin{cases}\frac{1}{8}(3\cdot2\Delta u+7\Delta v), & \text{当 } 2\Delta u\leqslant\Delta v \text{ 时},\\ \frac{1}{8}(7\cdot2\Delta u+3\Delta v), & \text{当 } 2\Delta u\geqslant\Delta v \text{ 时}.\end{cases}\tag{61}$$

我們認为可以猜测这个数学謎語如下.

因为在这法則中只出現了緯度差及經度差，所以显然所考虑的不是有限的球面三角形的解，而是無穷小的球面三角形的解，也就是說，我們要应用弧长的近似公式：

$$\Delta s\approx R\sqrt{\Delta u^2+\cos^2u\,\Delta v^2},\tag{62}$$

这个公式是从半徑为 R 的球面上弧元素的公式推出的. 因此上述法則只对不大的距离适用.

設已选定列宁格勒的緯度：$u=60°$；那么公式(62)就可写成：

$$\Delta s \approx \frac{1}{2} R \sqrt{\Delta v^2 + (2\Delta u)^2}. \tag{63}$$

現在發生了避免开平方，近似表示出函数$\sqrt{X^2+Y^2}$的問題；契比謝夫选取变数的綫性組合如下：

$$\sqrt{X^2+Y^2} \approx aX + bY \qquad (X, Y \geqslant 0). \tag{64}$$

换句話說，改取極坐标，我們要用 $\rho\ (a\cos\theta + b\sin\theta)$ 来逼近 ρ，或(設 ρ 为常数)用 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 来逼近 1．在例 5 中，我們已經研究过这个問題的解．

可是(为了减少誤差起見)对于$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$及$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$中每一区間，分别用两种不同的方法选取系数 a 及 b；在第一种情形下，$Y \leqslant X$；在第二种情形下，$Y \geqslant X$．

对于区間$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$，由例 5 可得$\left(令\ \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}\right)$：

$$a = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{16}} = 0.96046, \qquad b = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{16}} = 0.39784, \qquad L = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{16} = 0.03956,$$

因此(当 $X \geqslant Y$ 时)

$$\sqrt{X^2+Y^2} \approx 0.96046\,X + 0.39784\,Y,$$

其相对誤差不超过 0.03956．

利用近似等式(63)，我們有(当 $2\Delta u \leqslant \Delta v$ 时)

$$\Delta s \approx \frac{1}{2} R\ (0.96046\,\Delta v + 0.39784 \cdot 2\,\Delta u). \tag{65}$$

把地球的半徑算作 $R = 5971.4$ 俄里，并且用分表示出經度差及緯度差：

$$\Delta v = \frac{\Delta V}{3437.75}, \qquad \Delta u = \frac{\Delta U}{3437.75},$$

于是关系式(65)就化为下列形状：

$$\Delta s \approx 0.83418\,\Delta V + 0.34552 \cdot 2\,\Delta U.$$

把系数写成比較簡单的形式：

$$0.83418 \approx \frac{7}{8}, \qquad 0.34552 \approx \frac{3}{8},$$

于是得到(61)中第一个公式．同样可以推得第二个公式．

順便指出，对于在这里所考虑的列宁格勒的緯度，系数有更适当的簡单形式：

$$0.83418 \approx \frac{5}{6}, \qquad 0.34552 \approx \frac{2}{6},$$

这样就要把契比謝夫法則的叙述作相应的改变．在这法則的原文中，所考虑的是苏联中部一带的緯度，在这一带，$\cos^2 u$ 大于$\frac{1}{4}$，因而公式(64)中的系数 a 及 b 也相应增大．

50.　連續及可微分函数的最好逼近．D. 杰克遜定理　設 $f(x)$ 是在区間$(-1, +1)$上給出的連續函数，$P_n(x)$ 是在这区間上与 $f(x)$ 相差最小的多項式，$E_n(f)$ 是

$f(x)$ 用 n 次多項式的最好逼近，因此

$$E_n(f)=\max_{|x|\leq 1}|f(x)-P_n(x)|.$$

显然[参看第 224 頁上的不等式(38′)]，

$$E_0(f)\geq E_1(f)\geq\cdots\geq E_n(f)\geq\cdots. \tag{66}$$

根据維尔斯德拉斯定理，对于任何連續函数，我們有

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f)=0^{1)}. \tag{66'}$$

以上所講的不仅对于通常的多項式成立，而且对于三角多項式也成立。

現在我們来研究逼近 $E_n(f)$ 遞減的速度与被逼近函数的性質之間的关系。

本节中所叙述的結果都是由 D. 杰克逊推得的[2]。

定理 1. 如果 $f(x)$ 是满足里卜希兹条件

$$|f(x')-f(x'')|<K|x'-x''| \qquad (x'\neq x'') \tag{67}$$

的周期連續函数，那末

$$E_n(f)<\frac{CK}{n}, \tag{68}$$

其中 $E_n(f)$ 表示用 n 次三角多項式(加常数权 $q(x)\equiv 1$)的最好逼近，C 是一絕对常数。

这个定理不是別的，就是維尔斯德拉斯定理的精确化。我們需要証明，可以选出一个 n 次三角多項式 $T_n(x)$，使得

$$|f(x)-T_n(x)|<\frac{CK}{n}. \tag{69}$$

在証明維尔斯德拉斯定理时(第 26 节)，我們曾經取

$$T_n(x)=\frac{\int_{-\pi}^{+\pi}F_n\left(\frac{t-x}{2}\right)f(t)\,dt}{\int_{-\pi}^{+\pi}F_n\left(\frac{t-x}{2}\right)dt}, \tag{70}$$

其中

$$F_n(u)=\cos^{2n}u.$$

---

1) 除了不等式(66)与(66′)外，数 $E_n(f)$ 不受任何其他限制。С. Н. Бернштейн [8] 在 1938 年肯定地解决了他[5]在哈尔科夫举行的全国数学家会議上所提出的最好逼近論的逆問題：对应于满足下列条件的任一数列 $\{\alpha_n\}$：

$$\alpha_0\geq\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_n\geq\cdots>0, \qquad \alpha_n\to 0,$$

是否可以选出一个满足下列关系式的連續函数 $f(x)$

$$E_n(f)=\alpha_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)?$$

关于这点，請参看 И. П. Натансон [1]，第五章，第 5 节。

2) D. Jackson [1].

現在令

$$F_n(u)=\left(\frac{\sin nu}{n\sin u}\right)^4, \tag{71}$$

而且我們注意到这时在公式(70)中的多項式 $T_n(x)$ 不是 n 次的，而是 $2n-2$ 次的。在公式(70)中改換变数 $t=x+2u$，我們得到：

$$T_n(x)=\frac{\int_{-\pi+x}^{+\pi+x}F_n\left(\frac{t-x}{2}\right)f(t)\,dt}{\int_{-\pi+x}^{+\pi+x}F_n\left(\frac{t-x}{2}\right)dt}=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,f(x+2u)\,du}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,du}$$

由此推得[利用不等式(67)]：

$$|f(x)-T_n(x)|=\left|\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}[f(x+2u)-f(x)]F_n(u)\,du}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,du}\right|<$$

$$<2K\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}|u|F_n(u)\,du}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,du}=2K\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}uF_n(u)\,du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,du}. \tag{72}$$

考虑到 $\sin u\leqslant u\ (0\leqslant u)$，由代換 $nu=v$ 可得：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F_n(u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{n\sin u}\right)^4du>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{nu}\right)^4du>\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{\sin nu}{nu}\right)^4du=$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^4dv=\frac{C_1}{n};$$

另一方面，由不等式 $\sin u\geqslant\frac{2u}{\pi}\left(0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 可推得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}uF_n(u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\left(\frac{\sin nu}{n\sin u}\right)^4du<\frac{\pi^4}{16n^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du.$$

但

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du,$$

而且

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du=n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 v}{v^3}dv=C_2n^2,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nu}{u^3} du < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u^3} < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{du}{u^3} = \frac{2n^2}{\pi^2} = C_3 n^2.$$

如果令 $\frac{\pi^4}{16}(C_2+C_3)=C_4$，由此可見

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u F_n(u)\, du < \frac{C_4}{n^2};$$

最后回到 (72)，并且令 $\frac{2C_4}{C_1}=\frac{1}{2}C$，我們有

$$|f(x)-T_n(x)| < \frac{CK}{2n}.$$

这样一来，注意到 $T_n(x)$ 的次数等于 $2n-2$，就可得

$$E_{2n-2}(f) < \frac{CK}{2n};$$

而这时

$$E_{2n-1}(f) \leqslant E_{2n-2}(f) < \frac{CK}{2n} < \frac{CK}{2n-1},$$

$$E_{2n}(f) \leqslant E_{2n-2}(f) < \frac{CK}{2n},$$

因而一般地

$$E_n(f) < \frac{CK}{n}.$$

定理 2. 如果 $f(x)$ 是周期連續函数，$E_n(f)$ 是它用 n 次三角多項式的最好逼近，那么

$$E_n(f) < C'\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{73}$$

其中 $\omega(\delta)$ 是 $f(x)$ 的連續模，C' 是一絕对常数.

用点

$$x_m = -\pi + \frac{2m\pi}{n} \qquad (m=0, 1, \cdots, n)$$

把周期 $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ 分成 n 等分，然后(与在第 22 节中一样)考虑折綫 $y=\tau(x)$，其頂点是曲綫 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_m 的点. 因为折綫各段的斜率显然不可能超过 $\frac{n}{2\pi}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$，所以 $\tau(x)$ 滿足里卜希茲条件

$$|\tau(x')-\tau(x'')| \leqslant k|x'-x''|,$$

其中 $k=\frac{n}{2\pi}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. 因此根据定理 1，有一 n 次三角多項式 $T(x)$ 存在，适合

$$|\tau(x)-T(x)| < \frac{C}{2\pi}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{74}$$

但另一方面，設 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$，我們得到：

$$|f(x)-\tau(x)| \leqslant |f(x)-f(x_i)|+|\tau(x)-\tau(x_i)| \leqslant 2\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{75}$$

由不等式(74)与(75)可推得：

$$|f(x)-T(x)|<\left(\frac{C}{2\pi}+2\right)\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)=C'\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

当然，考虑在区間 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 上用通常多項式的逼近时，也有类似的定理。这些定理都易于从定理 1 及 2 推得。

定理 1'. 如果函数 $f(x)$ 在区間 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 上連續，并且滿足里卜希兹条件

$$|f(x')-f(x'')|<K|x'-x''| \qquad (x' \neq x''; |x'|, |x''| \leqslant 1), \tag{76}$$

那么

$$E_n(f)<\frac{CK}{n}, \tag{77}$$

其中 $E_n(f)$ 表示函数 $f(x)$ 用 n 次通常多項式最好的逼近，C 是(与定理 1 中相同的)絕对常数。

由不等式(76)可得(应用有限增量定理)

$$|f(\cos x')-f(\cos x'')|<K|\cos x'-\cos x''|<K|x'-x''| \qquad (x' \neq x'').$$

因此根据定理 1，可以选出一个 n 次三角多項式 $T(x)$，使得

$$|f(\cos x)-T(x)|<\frac{CK}{n}.$$

因为 $f(\cos x)$ 是偶的周期函数，所以可以設 $T(x)$ 不含正弦。因此应用逆代換就可得到不等式

$$|f(x)-T(\arccos x)|<\frac{CK}{n},$$

其中 $T(\arccos x)$ 是通常的 n 次多項式。

定理 2'. 如果 $f(x)$ 是在区間 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 上的連續函数，$E_n(x)$ 是它用 n 次多項式的最好逼近，那么

$$E_n(f)<C''\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{78}$$

其中 $\omega(\delta)$ 是 $f(x)$ 的連續模，C'' 是一絕对常数。

这定理的証明完全与定理 2 的証明类似；常数 C'' 是由下列等式确定的：

$$C''=\frac{1}{2}C+2.$$

定理 3. 如果 $f(x)$ 是有 p 阶导数 $f^{(p)}(x)$ 的周期函数，其 p 阶导数滿足里卜希

兹条件

$$|f^{(p)}(x')-f^{(p)}(x'')|<K|x'-x''|, \tag{79}$$

那么它的最好三角逼近适合不等式

$$E_n(f)<\frac{C^{p+1}K}{n^{p+1}}, \tag{80}$$

其中 C 是与定理 1 中相同的常数.

根据定理 1，由不等式(79)可推得

$$E_n(f^{(p)})<\frac{CK}{n},$$

因此有一 n 次三角多项式 $T_n^{(p)}(x)$ 存在，适合

$$|f^{(p)}(x)-T_n^{(p)}(x)|<\frac{CK}{n}.$$

用 $U_n^{(p-1)}(x)$ 表示这样的 n 次三角多项式：它是 $T_n^{(p)}(x)$ 的积分，并且不含常数项. 上列不等式可以写成

$$|[f^{(p-1)}(x)-U_n^{(p-1)}(x)]'|<\frac{CK}{n},$$

由此可見，周期函数 $f^{(p-1)}(x)-U_n^{(p-1)}(x)$ 满足系数为 $\frac{CK}{n}$ 的里卜希兹条件[1]. 但在这种情形下，由定理 1，我們一定有不等式

$$E_n(f^{(p-1)}-U_n^{(p-1)})<\frac{C^2K}{n^2};$$

換句話說，有一 n 次多項式 $V_n^{(p-1)}(x)$ 存在，适合

$$|f^{(p-1)}(x)-U_n^{(p-1)}(x)-V_n^{(p-1)}(x)|<\frac{C^2K}{n^2}.$$

令

$$U_n^{(p-1)}(x)+V_n^{(p-1)}(x)=T_n^{(p-1)}(x),$$

我們可以把上列不等式換写成

$$|f^{(p-1)}(x)-T_n^{(p-1)}(x)|<\frac{C^2K}{n^2}.$$

反复进行这种推理，最后我們就得到与不等式(80)等价的不等式

$$|f(x)-T_n(x)|<\frac{C^{p+1}K}{n^{p+1}}.$$

---

1) 如果 $|F'(x)|<K$，那么 $|F(x')-F(x'')|<|x'-x''|$. 实际上，由拉格朗習定理可得：

$$|F(x')-F(x'')|=|F'(\xi)\cdot(x'-x'')|<K|x'-x''|.$$

定理 4. 如果 $f(x)$ 是有連續 p 阶导数的周期函数，那么它的最好三角逼近滿足不等式

$$E_n(f)<\frac{C^pC'}{n^p}\omega_p\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{81}$$

其中 $\omega_p(\delta)$ 表示 $f^{(p)}(x)$ 的連續模，C 及 C' 表示前面已引进的常数。

实际上，由定理 2 可得

$$E_n(f^{(p)})<C'\omega_p\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

与前面一样，由此可推得不等式(81)。

定理 3 及 4 也可推到函数 $f(x)$ 在已給区間上对通常的多项式的逼近的情形。

定理 3′. 如果函数 $f(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上有滿足里卜希茲条件的連續导数 $f^{(p)}(x)$：

$$|f^{(p)}(x')-f^{(p)}(x'')|<K|x'-x''| \qquad (x'\neq x'';|x'|,|x''|\leqslant 1), \tag{82}$$

那么它用通常多项式的最好逼近滿足下列不等式：

$$E_n(f)<\frac{C_pK}{n^{p+1}} \qquad \left(C_p=\frac{C^{p+1}(p+1)^{p+1}}{(p+1)!}\right) \qquad (n\geqslant p+1). \tag{83}$$

事实上，由不等式(82)可得(根据定理 1′)

$$E_{n-p}(f^{(p)})<\frac{CK}{n-p},$$

这就是說，有一 $n-p$ 次多项式 $P^{(p)}(x)$ 存在，使得

$$|f^{(p)}(x)-P^{(p)}(x)|<\frac{CK}{n-p},$$

或

$$|[f^{(p-1)}(x)-P^{(p-1)}(x)]'|<\frac{CK}{n-p}.$$

但是这就意味着 $f^{(p-1)}(x)-P^{(p)}(x)$ 滿足系数为 $\frac{CK}{n-p}$ 的里卜希茲条件．在这种情形下，

$$E_{n-p+1}(f^{(p-1)}-P^{(p-1)})<\frac{C^2K}{(n-p)(n-p+1)},$$

因此

$$E_{n-p+1}(f^{(p-1)})<\frac{C^2K}{(n-p)(n-p+1)}.$$

繼續像这样論証下去，最后我們得到不等式

$$E_n(f)<\frac{C^{p+1}K}{(n-p)(n-p+1)\cdots n}. \tag{84}$$

因为(当 $n\geqslant p+1$ 时)

$$n-k\geqslant\frac{p+1-k}{p+1}\cdot n,$$

所以不等式(84)可以換成不等式(83)。

定理 4′. 如果函数 $f(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上有以 $\omega_p(x)$ 为連續模的連續导数 $f^{(p)}(x)$，那么最好逼近 $E_n(f)$ 滿足不等式

$$E_n(f)\leqslant\frac{C'_p}{n^p}\omega_p\left(\frac{2}{n-p}\right), \tag{85}$$

其中

$$C'_p=C''C^p\frac{(p+1)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

实际上，根据定理 2′，

$$E_{n-p}(f^{(p)})<C''\omega_p\left(\frac{2}{n-p}\right),$$

由此逐步就可得到不等式(85)。

本节所証明的杰克逊定理具有下列特征，把它們指出来是極其重要的：1) 关于 $E_n(f)$ 的遞減的阶的結論，是用間接的方法，亦即用考虑不是最好逼近多項式而求得的(因此完全沒有引用到契比謝夫条件)；2) 所得結論(除了定理 2′ 以外)不是关于所有的連續函数的，而是关于特殊一类連續函数的。

同时在这里叙述的定理的証明是被簡化了的；我們只要看到被达到的逼近的阶，而不精确計算常数。

对于預先規定的逼近过程，漸近地确定已給的某些类函数的逼近的上界，并且精确算出常数这一問題，在現在已經取得了重大的成就。C. M. 尼柯尔斯基[1]的論文至少說明了在这方面的若干概念。

51. 关于多項式的导数的最大模的 C. H. 伯恩斯坦定理

定理 1[1]**.** 如果通常的 n 次多項式 $P(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上滿足不等式

$$|P(x)|\leqslant L, \tag{86}$$

那么它的导数滿足不等式

$$|P'(x)|\leqslant\frac{nL}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<+1). \tag{87}$$

1) С. Н. Бернштейн [1].

定理 2. 如果以 2π 为周期的 n 次三角多项式 $T(\theta)$ 在整个軸上滿足不等式

$$|T(\theta)|\leqslant L, \tag{88}$$

那么它的导数滿足不等式

$$|T'(\theta)|\leqslant nL \qquad (-\infty<\theta<+\infty). \tag{89}$$

在这里我們講 M. 黎斯[1]对定理 2 所作的証明，由此可以推出定理 1 作为定理 2 的系．預先我們导出任一 n 次三角多項式都要滿足的一个重要的恒等式．

考慮 n 次三角多項式

$$T_1(\theta)\equiv\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_{m=1}^{2n}T(\theta_m)(-1)^m\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_m}{2},$$

在这里为了簡单起見，我們用 θ_m 表示 $\cos n\theta$ 在周期 $0\leqslant\theta<2\pi$ 上的零点：

$$\theta_m=\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad (m=1,2,\cdots,2n).$$

因为数量

$$\frac{(-1)^m}{2n}\cos n\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_m}{2}$$

在 $\theta=\theta_k$ $(k\neq m)$ 时为零，在 $\theta=\theta_m$ 时取数值 1，由此可見，多項式 $T(\theta)$ 与 $T_1(\theta)$ 在 $2n$ 个点 θ_m 处取相同的数值．这并不能說明它們恒等，因为要它們恒等必須它們在 $2n+1$ 个点处取相同的数值．但差式 $T(\theta)-T_1(\theta)$ 在 $2n$ 个点 θ_m 处等于零，因此可以断定它只与 $\cos n\theta$ 相差一常数因子：

$$T(\theta)-T_1(\theta)=C\cos n\theta.$$

这样一来，我們就得到恒等式

$$T(\theta)\equiv C\cos n\theta+\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_{m=1}^{2n}T(\theta_m)\cdot(-1)^m\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_m}{2}, \tag{90}$$

其中常数 C 的数值我們还不知道．如果对恒等式(90)逐項求微分，然后令 $\theta=0$，那么我們就有

$$T'(0)=\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}T(\theta_m)\cdot(-1)^{m+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_m}{2}}, \tag{91}$$

其中常数 C 已不出現．

由以上所証，無論 n 次多項式 $T(\theta)$ 是怎样，等式(91)成立．把等式(91)应用到多項式 $T(\theta+\alpha)$，在这里 α 是一常数，然后用 θ 代替 α．于是我們求得：

1) M. Riesz [2].

$$T'(\theta)=\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}T(\theta+\theta_m)\cdot(-1)^{m+1}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_m}{2}}. \tag{92}$$

这就是任一n次三角多項式都要滿足的黎斯恒等式.

在恒等式(92)中令$T(\theta)\equiv\sin n\theta$, 然后取$\theta$等于零. 結果我們得到:

$$\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_m}{2}}=n. \tag{93}$$

現在容易証明定理2. 由恒等式(92)与不等式(88)可得

$$|T'(\theta)|\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}|T(\theta+\theta_m)|\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_m}{2}}\leqslant L\cdot\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_m}{2}},$$

其次, 利用公式(93),

$$|T'(\theta)|\leqslant nL,$$

这就是定理2中的結論.

現在来看定理1. 考慮n次三角多項式

$$T(\theta)\equiv P(\cos\theta).$$

由假設(86)可見

$$|T(\theta)|\leqslant L,$$

因此根据定理2,

$$|T'(\theta)|\leqslant nL. \tag{94}$$

但

$$T'(\theta)=\frac{d}{d\theta}P(\cos\theta)=-P'(\cos\theta)\sin\theta,$$

因此不等式(94)有下列形狀:

$$|P'(\cos\theta)|\leqslant\frac{nL}{|\sin\theta|}.$$

应用逆代換$\cos\theta=x$, 就可得到不等式(87).

附注. 在公式(89)中, 当$T(\theta)=\sin n(\theta-\theta_0)$时, 等式成立; 在公式(87)中, 当$P(x)=T_n(x)$(契比謝夫多項式)时, 等式成立.

我們容易把定理2推广到p阶导数的情形: 如果以2π为周期的n次三角多項式$T(\theta)$在整个軸上滿足不等式$|T(\theta)|\leqslant L$, 那么我們得到它的p阶导数的上界为

$$|T^{(p)}(\theta)|\leqslant n^pL. \tag{95}$$

定理 1 的情形要比較复杂一点．我們首先把它推广到区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上．設有不等式

$$|P(x)|\leqslant L \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{96}$$

令

$$X=\frac{2x-a-b}{b-a}, \qquad Q(X)\equiv P(x),$$

我們看出它与下列不等式等价：

$$|Q(X)|\leqslant L \qquad (-1\leqslant X\leqslant +1).$$

但这时由定理 1,

$$|Q'(X)|\leqslant\frac{nL}{\sqrt{1-X^2}},$$

亦即(回到变数 x)

$$|P'(x)|\leqslant\frac{nL}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \tag{97}$$

現在設点 x_k $(k=1,2,\cdots,p-1)$ 滿足关系式

$$0<x_{p-1}<\cdots<x_2<x_1<1.$$

由不等式(86)可推得不等式(87)，因而更加有

$$|P'(x)|\leqslant\frac{nL}{\sqrt{1-x_1^2}} \qquad (-x_1\leqslant x\leqslant x_1).$$

但这时由不等式(97),

$$|P''(x)|\leqslant\frac{n(n-1)L}{\sqrt{1-x_1^2}\ \sqrt{x_1^2-x^2}} \qquad (-x_1\leqslant x\leqslant x_1).$$

特别,

$$|P''(x)|\leqslant\frac{n(n-1)L}{\sqrt{1-x_1^2}\ \sqrt{x_1^2-x^2}} \qquad (-x_2\leqslant x\leqslant x_2).$$

因而同时又有

$$|P'''(x)|\leqslant\frac{n(n-1)(n-2)L}{\sqrt{1-x_1^2}\sqrt{x_1^2-x_2^2}\sqrt{x_2^2-x^2}} \qquad (-x_2<x<x_2).$$

这样繼續做下去，一般我們得到

$$|P^{(p)}(x)|\leqslant\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)L}{\sqrt{1-x_1^2}\sqrt{x_1^2-x_2^2}\cdots\sqrt{x_{p-1}^2-x^2}} \qquad (-x_{p-1}<x<x_{p+1}). \tag{98}$$

选取数 x_k，使得上列不等式的右边取可能較小的值：这时分子中的一切因子必須彼此相等：

$$1-x_1^2=x_1^2-x_2^2=\cdots=x_{p-1}^2-x^2,$$

由此可見，其中任一因子必須等于$\frac{1-x^2}{p}$. 在这种情形下，不等式(98)有下列形状：

$$|P^{(p)}(x)|\leqslant\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)p^{\frac{p}{2}}L}{(1-x^2)^{\frac{p}{2}}},$$

或者粗糙一点，

$$|P^{(p)}(x)|\leqslant\frac{n^p p^{\frac{p}{2}}L}{(1-x^2)^{\frac{p}{2}}}. \tag{99}$$

附注. 不等式(87)是精确的，因为当$P(x)\equiv T_n(x)$时就是这样. 不等式(99)是不精确的(如果$p\geqslant 2$).

在上面只导出了 C. H. 伯恩斯坦型的不等式，以下要用到这些不等式。我們不講它們的多种多样的推广（这些推广也有極广泛的应用），而只講它們原来的形状. A. A. 馬尔可夫[1]不等式就是这样的.

如果n次多項式$P(x)$在区間$-1\leqslant x\leqslant 1$上滿足不等式

$$|P(x)|\leqslant L, \tag{100}$$

那么它的导数在同一区間上滿足不等式

$$|P'(x)|\leqslant n^2L. \tag{101}$$

因为(101)可由(87)推出，所以这定理容易从定理1（第246頁）推出. 以下所講的是I. 舒尔的証法[1]).

我們只須証明：如果$n-1$次多項式$Q(x)$在区間$-1\leqslant x\leqslant +1$上滿足不等式

$$|Q(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{102}$$

那么它也滿足不等式

$$|Q(x)|\leqslant n, \tag{103}$$

然后把这个断語应用到多項式$Q(x)=\frac{P'(x)}{nL}$.

关于多項式$Q(x)$的定理在$|x|\leqslant\cos\frac{\pi}{2n}$时很容易看出，因为这时

$$\sqrt{1-x^2}\geqslant\sin\frac{\pi}{2n},$$

并且（由于当$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$）

$$\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{1}{n}.$$

現在还只須考慮

1) I. Schur [1].

$$\cos\frac{\pi}{2n}<|x|\leqslant 1 \tag{104}$$

时的情形．我們要利用 $Q(x)$ 的一种展开式，亦即取契比謝夫基点

$$x_m=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2n} \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

把 $Q(x)$ 按拉格朗習插补公式展开：

$$Q(x)=\sum_{m=1}^{n}Q(x_m)\frac{T_n(x)}{T'_n(x_m)(x-x_m)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sqrt{1-x_m^2}\,Q(x_m)\frac{T_n(x)}{x-x_m}.$$

根据不等式(102)，注意到所有的差 $x-x_m$ 都有相同的符号，可以写出

$$|Q(x)|\leqslant\frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{1}{x-x_m}\right|=\frac{|T_n(x)|}{n}\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{x-x_m}\right|=$$

$$=\frac{|T_n(x)|}{n}\left|\frac{T'_n(x)}{T_n(x)}\right|=\frac{1}{n}|T'_n(x)|.$$

另一方面，我們有：

$$|T'_n(x)|=\left|\frac{n\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant n^2. \tag{105}$$

由此可見，不等式(103)成立；于是不等式(101)得証．

我們指出，对于多項式 $P(x)=T_n(x)$，当 $x=1$ 时，在关系式 (101) 中就得到等号[1]．

顺便比照一下在不等式(101)的右边有因子 n^2，而在不等式(89)的右边有因子 n．

同时值得注意：就这点看来，在复数平面上单位圆的情形与三角多項式的情形相类似．

如果有复系数的 n 次多項式 $P(x)$ 在圓 $|z|\leqslant 1$ 上滿足不等式

$$|P(z)|\leqslant L, \tag{106}$$

那么它的导数在同一圓上滿足不等式

$$|P'(z)|\leqslant nL. \tag{107}$$

这个断語可以直接从"三角的"定理 2 推出．事实上 (参看 C. H. 伯恩斯坦[12]，第 45 頁)，設不等式(106)成立，并且設导数 $P'(z)$ 的模在单位圓周上某一点 $z=e^{i\alpha}$ 达到它的最大值 M[2]，而且

$$P'(e^{i\alpha})=Me^{i\beta}. \tag{108}$$

1) 参看第 21 頁上的公式(44')．

2) 在某一区域上正則的解析函数，只有在区域的边界上才能达到它的最大値．

引进新的多項式

$$P_1(z) \equiv e^{-i(\alpha+\beta)} P(e^{i\alpha} z) \equiv \sum_{m=0}^{n} c_m z^m \qquad (c_m = a_m + i b_m). \tag{109}$$

由(106),对于一切 θ,我們有

$$|P_1(e^{i\theta})| \equiv \left| \sum_{m=0}^{n} (a_m \cos m\theta - b_m \sin m\theta) + i \sum_{m=0}^{n} (a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta) \right| \leqslant L;$$

因而更加有

$$\left| \sum_{m=0}^{n} (a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta) \right| \leqslant L.$$

这时由定理 2,对于一切 θ 也有

$$\left| \sum_{m=0}^{n} m (a_m \cos m\theta - b_m \sin m\theta) \right| \leqslant nL;$$

特别,当 $\theta = 0$ 时,

$$\left| \sum_{m=0}^{n} m a_m \right| \leqslant n L. \tag{110}$$

另一方面,对(109)求微分,我們得到:

$$P_1'(z) \equiv e^{-i\beta} P'(e^{i\alpha} z),$$

因此利用(108),就有

$$P_1'(1) = e^{-i\beta} P'(e^{i\alpha}) = M.$$

但恰好同时

$$P_1'(z) \equiv \sum_{m=0}^{n} m c_m z^{m-1}, \qquad P_1'(1) = \sum_{m=0}^{n} m c_m.$$

于是

$$\sum_{m=0}^{n} m c_m = M,$$

因而

$$\sum_{m=0}^{n} m a_m = \Re \sum_{m=0}^{n} m c_m = \Re M = M.$$

在这种情形下,可以把不等式(110)写成

$$M \leqslant nL$$

(这就是需要証明的).

比照一下在这里所講的两个定理是特別有趣的．G. 齐格[1]有一篇論文闡明了关于区間及圓的情形的各种結果．在这篇論文中，齐格考慮有限个解析弧所范圍的閉区域 Δ，他証明了在条件 $\max_{\Delta}|P_n(z)|\leqslant 1$ 下，如果点 z_0 屬于 Δ，那么 $|P_n'(z_0)|$ 的上界与 Δ 的周綫以及 z_0 的位置有关：对于 Δ 的內点 z_0，这个界与 n 無关；如果 z_0 在周綫上，并且不是解析弧的端点（因此周綫在这点有切綫），那么这个界有阶 n；最后，如果 z_0 是两个解析弧的連結点，而且在这点（向 Δ 的內部的）两切綫所夹的角等于 $\alpha\pi$，那么这个界有阶 n^α．对于綫段 $(-1, +1)$ 的端点，α 的值等于 2；在 A. A. 馬尔可夫所考慮的情形下阶数增高，就可用这来解釋．如果取一正方形作为 Δ，那么在它的各頂点处有阶 $n^{3/2}$．

52. C. H. 伯恩斯坦定理（D. 杰克逊定理的逆定理） 如果已知最好逼近遞減得充分迅速，那么由此可以断定被逼近的函数有某些可微分的性質．

下列几个 C. H. 伯恩斯坦定理可以作为这种論断的例子；在某种意义下，它們是杰克逊定理的逆定理．

定理 1. 如果 $E_n(f)$ 表示周期函数 $f(x)$ 用 n 次三角多項式的最好逼近，而且下列不等式成立：

$$E_n(f)<\frac{C}{n^{p+\varepsilon}} \quad (\varepsilon>0), \tag{111}$$

其中 p 是一整数 $(p\geqslant 1)$，那么函数 $f(x)$ 有連續的 p 阶导数．

設 $T_n(x)$ 是給出最好逼近的 n 次多項式，于是

$$|T_n(x)-f(x)|<\frac{C}{n^{p+\varepsilon}}.$$

因此函数 $f(x)$ 可以展开为一致收斂的多項式級数：

$$f(x)=T_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}[T_m(x)-T_{m-1}(x)]. \tag{112}$$

如果我們集合这級数的各項如下：

$$f(x)=T_{n_0}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}[T_{n_m}(x)-T_{n_{m-1}}(x)]. \tag{113}$$

那么显然它还是一致收斂的，在这里

$$n_0<n_1<n_2<\cdots<n_m<\cdots$$

是随意遞增的数．因为

1) G. Szegö [1].

$$|T_{n_m}(x)-T_{n_{m-1}}(x)|=|[T_{n_m}(x)-f(x)]-[T_{n_{m-1}}(x)-f(x)]|\leqslant$$
$$\leqslant|T_{n_m}(x)-f(x)|+|T_{n_{m-1}}(x)-f(x)|<\frac{C}{n_m^{p+\varepsilon}}+\frac{C}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}<\frac{2C}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}, \quad (114)$$

而級数$\sum_m \frac{1}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}$毫無疑义是收斂的，所以級数(113) [与級数(112)一样]不仅一致收斂，而且也絕对收斂。我們指出，由上列关系式，根据第51节中的不等式(89)可得

$$|T_{n_m}^{(p)}(x)-T_{n_{m-1}}^{(p)}(x)|<2C\frac{n_m^p}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}. \quad (115)$$

現在来选取数n_m。我們总可以选取n_m，使得級数

$$\sum_m \frac{n_m^p}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}$$

收斂。譬如說，只須令$n_m=2^m$。实际上，这时

$$\frac{n_m^p}{n_{m-1}^{p+\varepsilon}}=2^{p+\varepsilon}\left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^m,$$

于是級数$\sum_m\left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^m$收斂。但如果在不等式(115)右边的級数收斂，那么可以說对級数(113)逐項微分p次后所得的級数

$$T_{n_0}^{(p)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}[T_{n_m}^{(p)}(x)-T_{n_{m-1}}^{(p)}(x)] \quad (116)$$

不仅收斂，而且还一致收斂。因此根据著名的定理，級数(113)的和有連續的p阶导数。

附注. 我們可以不取不等式(111)，而要求級数

$$\sum_n n^p E_n(f) \quad (117)$$

收斂.

事实上，令$n^pE_n(f)=C_n$，我們就有不等式

$$|T_{n_m}^{(p)}(x)-T_{n_{m-1}}^{(p)}(x)|<(C_{n_m}+C_{n_{m-1}})\frac{n_m^p}{n_{m-1}^p},$$

因此，如果令$n_m=2^m$，那么应有

$$\frac{n_m^p}{n_{m-1}^p}=2^p,$$

又因由級数$\sum_n C_n$收斂可見級数$\sum_m C_{n_m}$收斂，所以与前面一样，我們可以断定級数(116)一致收斂.

定理 2. 如果$E_n(f)$表示函数$f(x)$用通常的n次多項式在区間$-1\leqslant x\leqslant+1$上的最好逼近，而且不等式(111)成立，其中p是一整数($p\geqslant1$)，那么函数$f(x)$在所

考虑的区間的內部有連續的 p 阶导数.

这个定理的証明完全与上一定理的証明类似. 我們只指出, 应用不等式(87)而不应用(89), 就可在(87)右边的分母中得到因子 $\sqrt{1-x^2}$. 于是可以断定只有在完全包含在基本区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 內部(任何)的一个区間上, 級数一致收斂. 因此不能保証在区間的端点有导数 $f^{(p)}(-1)$ 及 $f^{(p)}(+1)$.

关于定理 1 的附注当然对于定理 2 还是成立.

我們在上面已經說过 С. Н. 伯恩斯坦定理"在某种意义下"是 D. 杰克逊定理的逆定理. 現在来說明这是什么意思.

D. 杰克逊定理 1 就是說, 从里卜希兹条件(67)[它可写成

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<K \qquad (h\neq 0) \tag{118}$$]

可推得表达式 $nE_n(f)$ 有界. 可是由例子可以看到从表达式 $nE_n(f)$ 有界不能推出形如(118)的里卜希兹条件[虽然从表达式 $n^{1+\varepsilon}E_n(f)$ 有界(無論正数 ε 是怎样小)或者甚至級数 $\sum nE_n(f)$ 收斂可以推出这个条件]. 不久以前, A. 齐格蒙特[1]闡明了由表达式 $nE_n(f)$ 有界可推出的不是形如(118)的不等式, 而是有另一形状的不等式, 亦即:

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}\right|<K \qquad (h\neq 0) \tag{119}$$

(在这分数的分子上, 不是一阶有限差, 而是二阶有限差), 而且反过来說, 由形如(119)的不等式可推出表达式 $nE_n(f)$ 有界.

同样, 表达式 $n^{p+1}E_n(f)$ 有界是 p 阶导数 $f^{(p)}(x)$ 滿足形如(119)的不等式的必要与充分条件.

杰克逊与伯恩斯坦定理以及齐格蒙特所作的补充, 在 И. П. 那湯松[1]的書中第四及第五章內都已講到.

53. 用各級导数的最大模估計函数的最好逼近

С. Н. 伯恩斯坦[1]定理[2]. 如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上有导数 $f^{(n+1)}(x)$ 及 $g^{(n+1)}(x)$ 滿足不等式

$$0<|f^{(n+1)}(x)|<|g^{(n+1)}(x)|, \tag{120}$$

那么

$$E_n(f)<E_n(g). \tag{121}$$

1) A. Zygmund [1].

2) 以下所講的是 И. В. Цонов [1] 的証明.

設 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于同一組插补点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的拉格朗晉插补多項式. 令

$$f(x)-P_n(x)=R_n(x), \qquad g(x)-Q_n(x)=S_n(x),$$

考慮行列式

$$\Phi(z) \equiv \begin{vmatrix} R_n(x) & R_n(z) \\ S_n(x) & S_n(z) \end{vmatrix},$$

而且我們設 x 取已給区間中(与插补点不同的)一个固定数值.

因为显然

$$R_n(x_i)=0, \qquad S_n(x_i)=0,$$

所以

$$\Phi(x_i)=0 \qquad (i=0,1,\cdots,n);$$

此外,我們得到

$$\Phi(x)=0.$$

如果函数 $\Phi(z)$ 在上述区間中 $n+2$ 个点处为零,那么它的导数 $\Phi^{(n+1)}(z)$ 必至少在这区間中一点 ξ 处为零;于是

$$\Phi^{(n+1)}(\xi)=0 \qquad (-1<\xi<+1),$$

亦即

$$\begin{vmatrix} R_n(x) & R_n^{(n+1)}(\xi) \\ S_n(x) & S_n^{(n+1)}(\xi) \end{vmatrix}=0,$$

或

$$R_n(x)\, S_n^{(n+1)}(\xi)=S_n(x)\, R_n^{(n+1)}(\xi). \tag{122}$$

因为恒等式

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x), \qquad S_n^{(n+1)}(x)=g^{(n+1)}(x)$$

成立,所以等式(122)也可写成

$$R_n(x)\, g^{(n+1)}(\xi)=S_n(x)\, f^{(n+1)}(\xi).$$

由此可見,

$$|R_n(x)|\,|g^{(n+1)}(\xi)|=|S_n(x)|\,|f^{(n+1)}(\xi)|,$$

其次,注意到(120),可得(無論 x 是所考慮的区間中哪一点):

$$|R_n(x)|<|S_n(x)|,$$

亦即

$$|f(x)-P_n(x)|<|g(x)-Q_n(x)|. \tag{123}$$

求得的等式 (123) 具有独立的意义。我們把它应用如下。設 $\Pi_n(x)$ 是在所考慮的綫段上与函数 $g(x)$ 相差最小的 n 次多項式。根据契比謝夫条件 (第 48 节)，差式 $\Pi_n(x)-g(x)$ 以正負交錯的符号取数值 $\pm E_n(g)$ 不少于 $n+2$ 次；因此，使得等式 $\Pi_n(x)-g(x)=0$ 成立的点不少于 $n+1$ 个。取其中任意 $n+1$ 个点作为插补点，我們得到的插补多項式 $Q_n(x)$ 就是与 $g(x)$ 相差最小的多項式 $\Pi_n(x)$。在这种情形下，由不等式 (123) 可推得：对于所考慮的区間中一切数值 x，下列不等式成立：

$$|f(x)-P_n(x)|<E_n(g). \tag{124}$$

于是不等式

$$\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)|<E_n(g)$$

也成立。

对于一切 n 次多項式 $P_n(x)$，上列不等式左边的極小值是 $E_n(f)$，因而

$$E_n(f)\leqslant\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)|.$$

比較上两不等式，我們就得到所需要的不等式 (121)[1]。

附注。 这个定理可以推广到加权最好逼近

$$E_n(f,q)=\min_{P_n}\max_{|x|\leqslant 1}q(x)|f(x)-P_n(x)|$$

的情形，其中 $q(x)$ 适合極小条件 $q(x)\geqslant 0$, $q(x)\not\equiv 0$。

这个推广的証明与前面的証明只有一点不同，現在 $\Pi_n(x)$ 指的是与 $g(x)$ 加权 $q(x)$ 相差最小的 n 次多項式；此外，在把对应于 (123) 的不等式的右边用它的極大值来代替以前，应該用 $q(x)$ 乘这不等式的两边，結果我們得到的不是 (124)，而是

$$q(x)|f(x)-P_n(x)|<E_n(g,q).$$

其次，与以前一样，我們有：

$$E_n(f,q)<E_n(g,q). \tag{124'}$$

容易了解，最好逼近 $E_n(f)$ 有下列性質：

$$E_n(f+g)\leqslant E_n(f)+E_n(g). \tag{125}$$

实际上，如果多項式 $P_n(x)$ 及 $Q_n(x)$ 分別与 $f(x)$ 及 $g(x)$ 相差最小，那么 $P_n(x)+Q_n(x)$ 与 $f(x)+g(x)$ 相差不超过 $E_n(f)+E_n(g)$，因而它們的最小偏差就更加不超过 $E_n(f)+E_n(g)$。

系 1. 如果在区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上，

$$|f^{(n+1)}(x)|<g^{(n+1)}(x),$$

---

1) 如 И. В. Ценов [2] 所已指出，这里証明的定理对于次数为 $s\geqslant 1$ 的冪逼近的情形也正确。

那么

$$E_n(f)<2E_n(g). \tag{126}$$

事实上，根据不等式(125)，我們得到

$$E_n(f)=E_n\left(\frac{f+g}{2}+\frac{f-g}{2}\right)\leqslant E_n\left(\frac{f+g}{2}\right)+E_n\left(\frac{f-g}{2}\right),$$

又因

$$0<\frac{g^{(n+1)}(x)+f^{(n+1)}(x)}{2}<g^{(n+1)}(x),$$

并且

$$0<\frac{g^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x)}{2}<g^{(n+1)}(x),$$

所以根据已証明的定理，

$$E_n\left(\frac{f+g}{2}\right)<E_n(g),$$

并且

$$E_n\left(\frac{f-g}{2}\right)<E_n(g),$$

由此可推得不等式(126)。

系 2. 当常数权 $q(x)\equiv 1$ 时，下列不等式成立：

$$E_n(f)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

在这里 M_k 表示函数 $f(x)$ 的 k 阶导数在所考慮的区間上的最大模 $(k\geqslant 1)$。

为了証明起見，只須在系 1 中令

$$g(x)=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

事实上，

$$E_n\left(\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\right)=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}E_n(x^{n+1})=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

例. 令 $f(x)=e^x$, $n=10$，我們看到

$$E_{10}(f)<\frac{1}{11!}\cdot\frac{e}{2^9}<0.0000000001.$$

如果我們要估計圍繞着 $x=0$ 的泰乐展开式到含 10 次冪为止的部分和所給出的逼近，那么我們就求得誤差的上界等于 $\frac{e}{11!}$. 因此，有一 10 次的逼近多項式，其偏差界亦即誤差界，比泰乐逼近的誤差界小 500 多倍。

54. 解析函数的最好逼近　被逼近的函数 $f(x)$ 在区間 $(-1, +1)$ 上解析（正則）这种情形具有很大的意义，这也就是 $f(x)$ 在包含这区間的一个区域 (D) 內解析的情形．在这种情形下，可以断定最好逼近 $E_n(f)$ 遞減得比一个收斂几何級数的一般項迅速．

在某些条件下，从第 53 节系 2 已可推出这个結果．实际上，設 x 是区間 $(-1, +1)$ 上任一点．由哥西积分

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

可推得

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

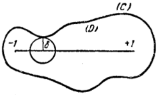


圖 24

因而如果用 M 表示函数 $f(z)$ 在周綫 (C) 上的最大模，用 L 表示周綫的长，并且用 δ 表示周綫与綫段 $(-1, +1)$ 的距离(圖 24)，那么

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\ \frac{LM}{\delta^{n+1}},$$

又因 x 为区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上任一点，所以(圖 24)

$$M_n\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{LM}{\delta^{n+1}}.$$

于是由不等式(126)可得

$$E_n(f)<\frac{K}{(2\delta)^n},$$

其中 K 是与 n 無关的常数．这样就証明了上述定理，不过要加上条件 $\delta>\frac{1}{2}$，亦即設函数 $f(z)$ 不仅在基本綫段上正則，而且在某一区域的一切点正則，这个区域的周綫与基本綫段的距离大于 $\frac{1}{2}$．

C. H. 伯恩斯坦曾經在完全一般的情况下証明了上述定理，并且算出了在最重要的情况下 $E_n(f)$ 的漸近值．在这里我們根据 C. H. 伯恩斯坦的思想来証明下列公式成立：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)}=\frac{1}{\rho_0},\tag{127}$$

其中 ρ_0 是以 -1 及 $+1$ 为焦点的一个橢圓的两半軸之和；在这橢圓的內部，函数 $f(x)$ 正則；在这橢圓的边界上，函数 $f(x)$ 至少有一奇异点．如果函数 $f(x)$ 是整函数，那么

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{E_n(f)}=0.\tag{128}$$

我們預先証明关于次数为已知的多項式的模的若干不等式．

1. 如果 n 次多項式 $P_n(z)$ 在单位圓 $|z|\leqslant 1$ 上滿足不等式

$$|P_n(z)|\leqslant L, \tag{129}$$

那么在有任意半徑 ρ (>1) 的同心圓 C_ρ

$$|z|=\rho$$

上(当然也在这圓內),它滿足不等式

$$|P_n(z)|\leqslant L\rho^n. \tag{130}$$

实际上,考虑补助函数

$$\varphi(z)\equiv\frac{P_n(z)}{z^n}.$$

这函数在閉区域 $|z|\geqslant 1$ 上正則;因此根据最大模原理,它在周綫 $|z|=1$ 上达到極大值。因为根据(129),在这周綫上,

$$|\varphi(z)|\leqslant L,$$

所以这个不等式在区域 $|z|\geqslant\rho$ 的一切点成立;由此可見,在这区域上,

$$\left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right|\leqslant L,$$

这就是不等式(129)。

2. 如果 n 次多項式 $P_n(z)$ 在单位区間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上 ($z=x+iy$) 滿足不等式

$$|P_n(z)|\leqslant L, \tag{131}$$

那么用 E_ρ 表示焦点在 ± 1、半軸和为 ρ 的椭圓,我們可以断言,在这椭圓的內部及其周綫上,下列不等式成立:

$$|P_n(z)|\leqslant L\rho^n. \tag{132}$$

我們順便作一說明。

我們已經看到,椭圓 E_ρ 上任一点的坐标可由下列公式給出:

$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\qquad y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi$$

[参看第 21 頁上公式(45)]。由下一公式(47′)可以看出,ρ 不是别的,就是表达式 $z+\sqrt{z^2-1}$ 的模[1],其中 z 是在椭圓 E_ρ 上任意一点:

$$\rho=|z+\sqrt{z^2-1}|.$$

于是不等式(132)可以写成下列形狀:

$$|P_n(z)|\leqslant L|z+\sqrt{z^2-1}|^n. \tag{133}$$

1) 这个表达式有两个值,我們所考慮的是模数比 1 大的那个值。

轉到証明上述定理，我們考虑补助函数

$$\varphi(z)=\frac{P_n(z)}{(z+\sqrt{z^2-1})^n}.$$

这函数在从 z 平面上除去单位綫段 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 后所得的区域 (D) 內正則，而这綫段就是 (D) 的边界[1]。

根据最大模原理，数量 $\varphi(z)$ 在边界上、亦即在单位綫段上达到極大値。但在这綫段上，我們有：

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{P_n(z)}{(z+\sqrt{z^2-1})^n}\right|\leqslant L.$$

因此，这个不等式在整个 z 平面上成立，而它与(132)或(133)等价。

附注． 比較定理 2 与从第 49 节中例 2 的解所推得的系 1 是很有趣的，过去我們得到了不等式

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{L}{2}\,|(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n|\qquad (x\leqslant-1\text{ 或 }\geqslant 1).$$

本节的定理 2 所包含的不等式較不精确，可是它有更一般的性質：在这不等式中，我們沒有假定多項式 $P_n(z)$ 的系数以及变数 z 的值是实数[2]。

3. 繼續进行推广，我們还指出下列定理[3]。設函数

$$w=w(z)$$

把圓形区域 $|w|\geqslant 1$ 保角映射到（在边界上保持連續性）內部包含無穷远点 $z=\infty$ 的一个单連区域(D)；無穷远点 $z=\infty$ 与 $w=\infty$ 彼此相互对应。用 $C\equiv C_1$ 表示区域(D)的边界，用 C_ρ 表示在 z 平面上通过上述映射与 $|w|=\rho$ 相对应的曲綫。

如果 n 次多項式 $P_n(z)$ 的模在曲綫 C_1 上不超过 L，那么在曲綫 C_ρ $(\rho>1)$ 的內部以及在这曲綫上，下列不等式成立：

$$|P_n(z)|\leqslant L\rho^n.$$

在証明时，应当考虑（与上面同样論証）补助函数

$$\varphi(z)=\frac{P_n(z)}{[w(z)]^n}.$$

定理 1 及 2 是定理 3 的特殊情形：如果 $w(z)\equiv z$，我們就得到定理 1；如果 $w(z)\equiv z+\sqrt{z^2-1}$，我們就得到定理 2。

---

1) 重要的是应当指出，在加上这个“两次被穿过的”綫段时，$\varphi(z)$ 的連續性保持不变．这个綫段可以看作是当 $\rho\to 1$ 时的“極限”橢圓 E_ρ．

2) С. Н. Бернштейн [6]，第 75 頁．

3) M. Riesz [3]．

現在来証明極限等式(127)．在綫段$(-1,+1)$上正則的函数$f(x)$一定可以展开为在这綫段上一致收斂的契比謝夫級数[1]：

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m T_m(x), \tag{134}$$

其中(当$x=\cos\theta$时)

$$c_m=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)\frac{T_m(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\cos\theta)\cos m\theta\,d\theta. \tag{135}$$

用$P_n(x)$表示給出加权$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$平方逼近的$n$次多項式：

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}c_m T_m(x),$$

容易了解，

$$|f(x)-P_n(x)|=\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}c_m T_m(x)\right|\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}|c_m|,$$

由此可見，

$$E_n(f)\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}|c_m|. \tag{136}$$

我們設法来求$|c_m|$的上界．在积分(135)中作变数代換$e^{i\theta}=z$，就得到：

$$c_m=\frac{1}{\pi i}\int_{(C)}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\cdot\frac{z^m+\frac{1}{z^m}}{2}\cdot\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{(C)}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)z^{m-1}\,dz+\int_{(C)}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{z^{m+1}}\right], \tag{137}$$

其中C是半徑为1的圓．

关系式

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

給出从平面z到平面x的这样一种映射：它使得焦点为-1及$+1$、半軸和为ρ的橢圓

1) 事实上，函数$f(\cos\theta)$有周期2π，并且在(θ平面上的)整个实数軸上正則，因此(第30节)它在这軸上可以展开为傅立叶級数；又因函数$f(\cos\theta)$是偶函数，所以显然这个傅立叶級数只有含余弦的各項：

$$f(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\cos m\theta;$$

把$\cos\theta$換成x，我們就得到展开式(134)．

与圆 $|z|=\rho$ 相对应；而这些椭圆也与圆 $|z|=\frac{1}{\rho}$ 相对应。由假設，函数 $f(x)$ 在半軸和等于 $\rho_0-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 的椭圆內部及其周綫上正則；設 M_ε 是 $f(x)$ 在这区域上的最大模。在这种情形下，函数 $f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)$ 在由圆

$$(\overline{C}):\qquad |z|=\rho_0-\varepsilon$$

与

$$(\underline{C}):\qquad |z|=\frac{1}{\rho_0-\varepsilon}$$

所作成的环形的內部、以及在这两圆周上都正則，它在这环形上的模不超过 M_ε。因此根据哥西定理，在等式(137)的右边，积分路綫 (C) 在第一个积分中可以換成 $(\underline{C})$，在第二个等式中可以換成 $(\overline{C})$。于是我們得到：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)z^{m-1}dz\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(\underline{C})}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)z^{m-1}dz\right|<\frac{M_\varepsilon}{(\rho_0-\varepsilon)^m},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{z^{m+1}}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(\overline{C})}f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{z^{m+1}}\right|<\frac{M_\varepsilon}{(\rho_0-\varepsilon)^m},$$

因而

$$|c_m|<\frac{2M_\varepsilon}{(\rho_0-\varepsilon)^m}.$$

由此可見，

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}|c_m|<\frac{2M_\varepsilon}{1-\frac{1}{\rho_0-\varepsilon}}\cdot\left(\frac{1}{\rho_0-\varepsilon}\right)^{n+1},$$

其次，根据不等式(136)，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)}\leqslant\frac{1}{\rho_0-\varepsilon};$$

因为 ε 可以随意小，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)}\leqslant\frac{1}{\rho_0}. \tag{138}$$

如果函数 $f(x)$ 是整函数，那么数 ρ_0 可以取作任意大，于是我們就得到(128)。

現在需要証明，对于 $\sqrt[n]{E_n(f)}$ 的上極限，已求得的上界不能減小。反之，設

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)}<\frac{1}{\rho_0}.$$

那么存在着一数 $\rho_1\ (>\rho_0)$，使得对于所有充分大的数值 n，不等式

$$\sqrt[n]{E_n(f)}<\frac{1}{\rho_1}$$

或

$$E_n(f)<\frac{1}{\rho_1^n}$$

成立。这就是說，用 $P_n(x)$ 表示給出函数 $f(x)$ 在綫段 $(-1,+1)$ 上的最好逼近的 n 次多項式，我們可以断定多項式級数

$$f(x)=P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)] \tag{139}$$

的一般項(在 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 时)滿足不等式

$$|P_n(x)-P_{n-1}(x)|\leqslant|P_n(x)-f(x)|+|P_{n-1}(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant E_n(f)+E_{n-1}(f)<\frac{2}{\rho_1^{n-1}}.$$

根据上面已証明的命題 2，由此可推得对于任意的复数值 z，下列不等式成立：

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)|<\frac{2}{\rho_1^{n-1}}|z+\sqrt{z^2-1}|^n.$$

令

$$z=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta}+\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right),$$

我們可以把上列不等式写成

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)|<2\rho_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n.$$

这就表明了在由不等式 $\rho<\rho_1$ 所表出的区域內，級数(139)一定一致收斂，因而函数 $f(x)$ 在这区域內正則。但这是不可能的，因为根据假設，在椭圓 $\rho=\rho_0$ 上，函数 $f(x)$ 已不正則。

第 50 节末所作的討論在这里也能适用。在已給的情形下，我們只考慮最好逼近的阶。对于一类函数的最好逼近的精确估計值，我們引証 H. И. 阿希哲[2]的結果作为例子：如果实函数 $f(x)$ 在以 ± 1 为焦点、以 $\rho_0\ (>1)$ 为半軸和的椭圓的內部正則，并且如果在这椭圓內，$f(x)$ 的实数部分的模小于 1，那么

$$E_n(f)\leqslant\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\frac{q^{n(2\nu+1)}}{1+q^{2n(2\nu+1)}}$$

$\left(其中\ q=\frac{1}{\rho_0}\right)$.

55. 所得結果在研究傅立叶級数与勒讓德級数的收斂性、插补过程以及机械求积公式上的应用 我們回到第16,20与21节中所提出的問題. 設 $f(x)$ 是連續周期函数. 我們已經看到,根据勒貝格定理(第186頁),如果有三角多項式 $T_n(x)$ 存在,滿足不等式

$$|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon_n,$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n \lg n=0,$$

換句話說,如果

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f)\lg n=0, \tag{140}$$

那么 $f(x)$ 的傅立叶級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

一致收斂,并且有和 $f(x)$,在这里

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin nt\,dt.$$

于是利用第50节中的系2,我們就得到很重要的这样一个命題.

如果連續周期函数 $f(x)$ 有連續模 $\omega(\delta)$,而且这連續模滿足狄尼条件

$$\lim_{\delta\to0}\omega(\delta)\lg\frac{1}{\delta}=0, \tag{141}$$

那么函数 $f(x)$ 的傅立叶級数一致收斂,并且有和 $f(x)$.

事实上,由第50节中的不等式(73)可得:

$$E_n(f)\lg n<C'\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\lg\frac{n}{2\pi}+\lg 2\pi\right),$$

于是利用等式(141)可推得关系式(140),而这个关系式是級数收斂的充分条件.

对于勒讓德級数也有类似的命題.

如果函数 $f(x)$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上有連續模 $\omega(\delta)$,而且这連續模滿足狄尼条件,那么函数 $f(x)$ 的勒讓德級数

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_nX_n(x)$$

在区間 $-1+\eta\leqslant x\leqslant+1+\eta\ (\eta>0)$ 上一致收斂,并且有和 $f(x)$,在这里

$$k_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)X_n(x)\,dx.$$

二十

由所得結果可作另一結論如下：

如果連續并有周期 2π 的函数 $f(x)$ 滿足狄尼条件，那么有等距离基点的插补三角多項式在整个軸上一致趋近于函数 $f(x)$.

簡单地用 $T_n(f;x)$ 表示在点

$$x_n=\frac{2m\pi}{2n+1}\qquad (m=0,1,\cdots,2n)$$

与函数 $f(x)$ 取相同数值的 n 次三角多項式. 这个三角多項式的形状是(参看第 9 节例 4)：

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}f\left(\frac{2m\pi}{2n+1}\right)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_m}{2}}{\sin\dfrac{x-x_m}{2}}.$$

另一方面，設 $R_n(x)$ 是与函数 $f(x)$ 相差最小的 n 次三角多項式，因而

$$|f(x)-R_n(x)|\leqslant E_n(f),$$

其中 $E_n(f)$ 是函数 $f(x)$ 的最好(三角)逼近.

因为显然

$$T_n(R_n;x)\equiv R_n(x),$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)-T_n(f;x)|&=|[f(x)-R_n(x)]-[T_n(f;x)-T_n(R_n;x)]|\leqslant\\&\leqslant|f(x)-R_n(x)|+|T_n(f-R_n;x)|\leqslant\\&\leqslant E_n(f)\left(1+\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_m}{2}}{\sin\dfrac{x-x_m}{2}}\right|\right).\end{aligned}$$

我們来估計所求得的和式. 設整数 k 是由不等式 $x_k\leqslant x<x_{k+1}$ 所确定的.

于是由关系式 $|\sin h\theta|\leqslant h|\sin\theta|$ $(h>1)$ 可推得：

$$\left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_k}{2}}{\sin\dfrac{x-x_k}{2}}\right|\leqslant 2n+1,\qquad \left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_{k+1}}{2}}{\sin\dfrac{x-x_{k+1}}{2}}\right|\leqslant 2n+1;$$

另一方面，如果 $m<k$ 或 $m>k+1$，那么利用不等式 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ 可得：

$$\left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_m}{2}}{\sin\dfrac{x-x_m}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x-x_m}{2}\right|}<\frac{\pi}{|x-x_m|},$$

因此

$$\sum_{\substack{m=0,1,\cdots,2n\\ m\neq k,k+1}}\left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_m}{2}}{\sin\dfrac{x-x_m}{2}}\right|<\pi\sum_{\substack{m=0,1,\cdots,2n\\ m\neq k,k+1}}\frac{1}{|x-x_m|}<\pi\cdot\frac{2n+1}{2\pi}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h}<\frac{2n+1}{2}(1+\lg n),$$

其次，比較所得的結果，

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\left|\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-x_m}{2}}{\sin\dfrac{x-x_m}{2}}\right|<\frac{5+\lg n}{2}.$$

由此可見，

$$|f(x)-T_n(f;x)|\leqslant E_n(f)\frac{7+\lg n}{2}.$$

显然，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n(f)\lg n=0$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(f;x)=f(x)$（一致地），于是結果我們又得到条件(141)。

完全同样，可以証明：如果函数 $f(x)$ 在基本区間 $(-1,+1)$ 上連續，并且滿足狄尼条件，那么有契比謝夫基点的拉格朗智插补多項式在整个区間上一致趋近于函数 $f(x)$。

最后，我們注意：依照通常的方向，这种思想还可發展到下列命題：

只須函数 $f(x)$ 在基本区間上連續，高斯-克利斯托費尔机械求积公式(第 39 节)就給出一种收斂过程。

现在来証明这个命題。我們所講的公式有下列形状：

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}f(x_i^{(n)}).\tag{142}$$

如果 $f(x)$ 是次数不超过 $2n-1$ 的多项式，那么等式 (142) 是精确的；在其余的情形下，它是近似的。为了簡单起見，令

$$U(f)=\int_a^b f(x)\,d\psi(x),\qquad U_n(f)=\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}f(x_i^{(n)}).$$

因为对于次数 $\leqslant 2n-1$ 的任何多项式，我們有：

$$U(P)=U_n(P),$$

所以如果 n 次多項式 $P_n(x)$ 給出函数 $f(x)$ 在基本区間上的最好逼近，我們就得到：

$$|U(f)-U_n(f)|=|[U(f)-U(P_n)]-[U_n(f)-U_n(P_n)]|\leqslant$$
$$\leqslant|U(f)-U(P_n)|+|U_n(f)-U_n(P_n)|.$$

但

$$|U(f)-U(P_n)|=\left|\int_a^b[f(x)-P_n(x)]d\psi(x)\right|\leqslant E_n(f)\cdot\int_a^b d\psi(x)=E_n(f),$$

又由于 $A_i^{(n)}>0$, 并且另一方面, $\sum_{i=1}^n A_i^{(n)}=1$ (第 30 节), 我們有:

$$|U_n(f)-U_n(P_n)|=\left|\sum_{i=1}^n A_i^{(n)}[f(x_i^{(n)})-P_n(x_i^{(n)})]\right|\leqslant E_n(f)\sum_{i=1}^n A_i^{(n)}=E_n(f).$$

因此

$$|U(f)-U_n(f)|\leqslant 2E_n(f),$$

又因 $\lim_{n\to\infty}E_n(f)=0$, 所以 $\lim_{n\to\infty}U_n(f)=U(f)$, 这就是需要証明的.

本节中所講的可以包含在下列概要內. 設考虑在基本区間上連續的函数 $f(x)$ 的逐次逼近; 这些逼近可由形如

$$P_n(f;x)=\int K_n(x,t)f(t)\,d\psi(t)$$

的公式給出, 其中 $K_n(x,t)$ 連續, $\psi(t)$ 在基本区間上单調不減. 假定 $\Pi_n(x)$ 是給出函数 $f(x)$ 的最好逼近的 n 次多項式, 因而

$$|\Pi_n(x)-f(x)|\leqslant E_n(f).$$

另一方面, 設(与第 200 頁第 44 节中一样)数 Ω_n 是积分 $\int|K_n(x,t)|d\psi(t)$ 对于变数 x 的上界:

$$\int|K_n(x,t)|d\psi(t)\leqslant\Omega_n.$$

我們在这里只考虑有下列性質的逼近过程: 求任何 n 次多項式用同次多項式的逼近, 就得到与原式相同的多項式. 这样,

$$P_n(\Pi_n;x)=\Pi_n(x).$$

于是容易写出下列不等式:

$$|P_n(f;x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|P_n(f;x)-P_n(\Pi_n;x)|+|P_n(\Pi_n;x)-\Pi_n(x)|+|\Pi_n(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int K_n(x,t)[f(t)-\Pi_n(t)]d\psi(t)\right|+E_n(f)\leqslant$$
$$\leqslant E_n(f)\int|K_n(x,t)|d\psi(t)+E_n(f)\leqslant E_n(f)(\Omega_n+1).$$

現在我們可以作出結論: 只須下列关系式成立:

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f)\,\Omega_n=0,$$

逼近就有一致收歛性：

$$\lim_{n\to\infty} P_n(f;x)=f(x).$$

附注. 如果写出

$$P_n(f;x)=\int f(t)\,d_t\Psi_n(x,t),$$

$$\int|d_t\Psi_n(x,t)|\leqslant\Omega_n,$$

那么以上所講的也包括插补过程的情形.

最后，我們还講到求积法的收歛性的問題，用

$$U_n(f)=\int f(x)\,d\psi_n(x)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

表示积分

$$U(f)=\int f(x)\,d\psi(x)$$

的近似値. 設在 $f(x)$ 是 n 次多項式时，$U_n(f)$ 恰好等于 $U(f)$. 于是

$$\begin{aligned}&|U_n(f)-U(f)|\leqslant\\&\leqslant|U_n(f)-U_n(\Pi_n)|+|U_n(\Pi_n)-U(\Pi_n)|+|U(\Pi_n)-U(f)|\leqslant\\&\leqslant\left|\int[f(x)-\Pi_n(x)]d\psi_n(x)\right|+\left|\int[f(x)-\Pi_n(x)]d\psi(x)\right|\leqslant\\&\leqslant E_n(f)\left[\int|d\psi_n(x)|+\int|d\psi(x)|\right].\end{aligned}$$

用 $V_n=\int|d\psi_n(x)|$ 表示函数 $\psi_n(x)$ 在基本区間上的全变差，我們就可証实条件

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)\,V_n=0$$

是求积法收歛

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)=U(f)$$

的充分条件.

在高斯-克利斯托費尔公式中，我們有 $A_i^{(n)}>0$，因而

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}|A_i^{(n)}|=\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}=1,$$

由此可見，对于任一連續函数，求积法收歛.

对于哥特斯公式，不可能作出同样的結論，因为虽然哥特斯系数的和等于 1，但在其中有負数，而为了闡明求积法的收歛問題，必須研究系数的絕对値的和.

第五章

复数区域中的插补法与逼近法

56. 一般說明 在复数区域中函数的近似表示問題基本上是像在实数区域中一样提出来的：給定了某一比較广闊的函数类($\mathfrak{F}$)中一个函数$f(z)$；要从某一比較狹窄的函数类($\mathfrak{P}$)中选出一个函数$P(x)$，使得它与函数$f(x)$在某种意义下相差很小。在这里我們也把問題分为两个类型。

在第一类型的問題中，类($\mathfrak{F}$)是由复变函数$f(z)$所組成，它們在某一个由簡单閉曲綫(C)所包圍的基本区域(D)內正則，因而有限，而在其边界(C)上也是如此；类($\mathfrak{P}$)是由具有任意的(复数)系数的通常多項式

$$P(z)=\sum_{m=0}^{n}c_m z^m \qquad (1)$$

所組成。至于次数或其他則受有一些限制。

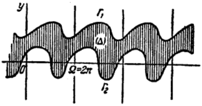


圖 25

在第二类型的問題中，类($\mathfrak{F}$)是由复变函数$f(z)$所組成，它們具有周期Ω(我們可以把它算作2π)，并且在两条無限的具有周期Ω的曲綫(Γ_1)与(Γ_2)所夹的連通区域(Δ)內是正則的(圖25)，也在这两条曲綫上是正則的。至于类($\mathfrak{P}$)，則它是在可能的一些限制下由任意的(复数)系数的三角多項式

$$T(z)=\sum_{m=0}^{n}(a_m\cos mz+b_m\sin mz) \qquad (2)$$

所組成。

令

$$\cos u=\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}, \qquad \sin u=\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}$$

并引进記号

$$\frac{a_m-ib_m}{2}=c_m, \qquad \frac{a_m+ib_m}{2}=c_{-m},$$

我們可更簡地写成：

$$T(z)=\sum_{m=-n}^{+n} c_m e^{imz}$$

(“指数形式”的記法)。

必須說明，为什么我們知道在所給的($\mathfrak{F}$)类的函数 $f(z)$ 上需要加上解析性(正則性)的要求。首先，通常多項式 $P(z)$ 是(到处)解析的；其次，在某一复数区域中(沒有界点的二維区域，参考第 8 頁)由多項式序列或級数通过取一致極限的过程所得到的函数是解析的；最后，需要指出由解析函数序列或級数通过这种运算的結果所产生的函数也是解析的(維尔斯德拉斯定理，第 12 頁)。由此可見，解析函数在复数区域中所起的广泛作用与連續函数在实数区域中所起的作用相同：根据維尔斯德拉斯的另一定理(是在本書第二章中我們集中討論过的題目)，連續函数类恰好与在实軸綫段上能够由通常多項式通过取一致極限的过程所得到的函数类相同。

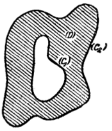


圖 26

因此，我們虽然不限于考虑只包含界点的区域(离散的点集或曲綫——譬如說，实軸应列入“曲綫”之內!)，也不假定分析学中通用的一致收斂概念有任何改变，但在复数区域中不得不考虑只具有解析性的函数的近似表示。問題的任何别的提法都是不自然的。

另一方面，必須說明，要考虑用通常多項式的逼近法，应从下面的假設出發：連通的而且有限的区域(D)是由仅仅一条閉曲綫(C)所圍成。在相反的情况下，区域(D)是双連通的(或多連通的)：它的一个边界(譬如說(C_1))落在另一个边界(譬如說(C_2))的內部(圖 26)。如果多項式的序列(或級数)在(C_1)与(C_2)所圍成的区域(D)內是一致收斂的，則由解析函数的性質，它也在边界(C_2)所包圍的区域內一致收斂；因而原来在(D)內是解析的而在(C_2)內部不是解析的这样一个函数却不可能以多項式为它的近似表示。例如，在圓环 $1<|z|<2$ 內不能用多項式来逼近函数$\frac{1}{z}$。总之，引进的限制依賴于逼近函数的选擇。

同样，在第二类型的問題中，用周期函数 $\cos mz$ 与 $\sin mz$ (或最簡单的周期函数 e^{iz} 的冪)来逼近具有周期 2π 的已知函数，用不着預先假定被逼近的函数的定义区域(Δ)可能会有“周期的洞”。

57. 复数区域中的有限插补法　关于作出滿足有限多个条件[参考第 8 节中公式(11)与(12)]

$$P(z_m)=w_m \qquad \begin{pmatrix} m=0,1,\cdots,n; \\ z_i\neq z_k,\text{当 } i\neq k \end{pmatrix} \tag{3}$$

的拉格朗智插补多项式 $P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$ 的問題，这里給定成对的复数 (z_m, w_m)，并允許所求的多項式可有复系数，这問題可以像在实数域中一样地解决，同时这个解是唯一地由下列公式所确定：

$$P(z)=\sum_{m=0}^{n} w_m \frac{A(z)}{A'(z_m)(z-z_m)}, \tag{4}$$

其中

$$A(z)=\prod_{m=0}^{n}(z-z_m).$$

自然，这与所求的系数所滿足的綫性方程組的房德蒙行列式异于零这一情形相关：事实上，在复数域中像在实数域中一样，一个乘积在而且只在它的某一因子为零时才等于零。

依同理，三角插补公式（参考第 9 节）也保持有效——把它們写成指数的形式更加方便。

差分比的插补公式，特别，对应于插补点成一算术級数的牛頓差分公式(48)（第 50 頁），也同样保持有效，因为这里所說的只是拉格朗智公式的另一种写法而已。

最后，厄米特公式(68)（在第 60 頁上）也成立，这个公式解决了这样的問題

$$P^{(h)}(z_k)=w_k^{(h)} \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\cdots,\alpha_k-1; \\ k=1,2,\cdots,s \end{pmatrix};$$

就是說，我們得到：

$$P(z)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{A(z)}{(z-z_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} w_i^{(k)} \frac{(z-z_i)^k}{k!}\left\{\frac{(z-z_i)^{\alpha_i}}{A(z)}\right\}_{(z_i)}^{(\alpha_i-k-1)}\right], \tag{5}$$

其中

$$A(z)=\prod_{i=1}^{s}(z-z_i)^{\alpha_i};$$

事实上，第 13 节中的論証可以毫不改变，如果討論的是复数数据（并且也保持所有的記号不变）。

当然，只是在实数数据下适用的几何意义自然会完全消失[1]。

余項的形式同样也不适用，它們是应用实質上屬于实数域的罗尔定理推出来的

1) 可是，"結点"这个名詞在复数的情况下也是以"插补点"的意义来使用的。

(第 15 节).

例 1. 試求五次多項式 $P(z)$，它在点 $0, 1, i, -1, i+1$ 与 $2i$ 处分别取値 $0, i, -i, i, -2$ 与 $-4i$.

答.
$$P(z)=iz^2.$$

例 2. 試作 $n-1$ 次多項式 $P(z)$，它在点
$$\omega^m \qquad (m=0,1,\cdots,n-1)$$
处(其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$)分别取值 ω^{-m}.

因为
$$A(z)=z^n-1,$$
所以
$$A'(z)=nz^{n-1} \quad 并且 \quad A'(\omega^m)=n\omega^{m(n-1)}=n\omega^{-m}.$$
因此
$$P(z)=\frac{1}{n}(z^n-1)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{z-\omega^m}=z^{n-1}.$$

例 3. 写出满足条件
$$P^{(h)}(\omega^k)=f^{(h)}(\omega^k) \qquad \begin{pmatrix}k=0,\ 1,\cdots,n-1,\\ h=0,\ 1,\cdots,\alpha-1\end{pmatrix}$$
(其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$)的 $n\alpha-1$ 次的插补多項式 $P(z)$ 的表达式.

答.
$$P(z)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{z^n-1}{z-\omega^i}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(\omega^i)\frac{(z-\omega^i)^k}{k!}\left\{\left(\frac{z-\omega^i}{z^n-1}\right)^\alpha\right\}^{(\alpha-k-1)}_{(\omega^i)}\right].$$
特别，当 $n=2$ 时
$$P(z)=(z-1)^\alpha\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(-1)\frac{(z+1)^k}{k!}\left\{\left(\frac{1}{z-1}\right)^\alpha\right\}^{(\alpha-k-1)}_{(+1)}+$$
$$+(z+1)^\alpha\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(1)\frac{(z-1)^k}{k!}\left\{\frac{1}{(z+1)^\alpha}\right\}^{(\alpha-k-1)}_{(-1)}.$$

58. 用复变积分形状表示拉格朗習插补式的余項[1)] 給出复数数据时，当被插补函数 $f(z)$ 是解析的时候，关于余項可以得到一个格外方便而且不包含任何未知量的表达式；就是說：余項可以写成下列形状
$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{A(z)}{A(\zeta)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{6}$$
并且簡单的閉曲綫 (C) 在滿足下面的要求下是任意的：1)函数 $f(z)$ 在曲綫 (C) 上及其

1) Ch. Hermite[1].

內部是正則的，2)所有的插补点 $z_m(m=0,1,\cdots,n)$ 都在 (C) 的內部。

于是对于插补多項式 $P(z)$ 本身同样也得到复变积分形状的表达式

$$P(z)=f(z)-R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{A(z)}{A(\zeta)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{A(\zeta)-A(z)}{A(\zeta)(\zeta-z)}f(\zeta)d\zeta. \tag{7}$$

等式(6)可以直接通过計算右端积分来檢驗。我們首先假定，在插补点中沒有重点。积分号下的变数 ζ 的函数

$$\frac{A(z)}{A(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \tag{8}$$

除了以点 $z_m(m=0,1,\cdots,n)$ 与 z 为它的单極点外，在(C) 上及其內部是正則的。这个积分等于被积函数关于所有的極点的殘数之和。关于極点z_m的殘数是

$$\frac{A(z)}{A'(z_m)}\frac{f(z_m)}{z_m-z};$$

关于極点 z 的殘数是 $f(z)$，由此可見，我們的积分等于

$$f(z)-\sum_{m=0}^{n}f(z_m)\frac{A(z)}{A'(z_m)(z-z_m)},$$

并且因为最后这个和不是别的，正是拉格朗習的插补多項式 $P(z)$ ［第 11 节中公式(45)］，所以我們知道积分等于 $f(z)-P(z)$，也就是 $R(z)$。

現在假定插补点可以是重的，我們設点 z_m 是

$$\alpha_m \qquad (m=1,2,\cdots,s;\quad \sum_{m=1}^{s}\alpha_m=n+1)$$

重点。多項式 $A(z)$ 具有 $(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_s)^{\alpha_s}$ 的形狀。我們来計算函数(8)关于極点 z_m 的殘数。在点 z_m 的邻域內，我們有冪級数展开式：

$$f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_m)}{k!}(\zeta-z_m)^k,$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_m)^l}{(z-z_m)^{l+1}},$$

$$\frac{(\zeta-z_m)^{\alpha_m}}{A(\zeta)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(m)}(\zeta-z_m)^\nu.$$

要想得到所求的殘数，需要連乘这三个已写出的級数，而取$(\zeta-z_m)^{\alpha_m-1}$ 的系数，然后再用 $A(z)$ 去乘它。显然，所說的系数等于(用第 13 节的記号)

$$-\frac{1}{(z-z_m)^{\alpha_m}}\sum_{k=0}^{\alpha_m-1}\frac{f^{(k)}(z_m)}{k!}(z-z_m)^k\sum_{\nu=0}^{\alpha_m-k-1}c_\nu^{(m)}(z-z_m)^\nu=$$

$$=-\frac{1}{(z-z_m)^{\alpha_m}}\sum_{k=0}^{\alpha_m-1}f^{(k)}(z_m)\frac{(z-z_m)^k}{k!}\left\{\frac{(z-z_m)^{\alpha_m}}{A(z)}\right\}_{(z_m)}^{(\alpha_m-k-1)},$$

由此可見，要計算的积分等于

$$f(z)-\sum_{m=0}^{n}\frac{A(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}\sum_{k=0}^{\alpha_m-1}f^{(k)}(z_m)\frac{(z-z_m)^k}{k!}\left\{\frac{(z-z_m)}{A(z)}\right\}_{(z_m)}^{(\alpha_m-k-1)},$$

而在最后这个表达式中的和，根据第 13 节的公式(69)，恰好是对应于所选取的插补点系的插补多項式 $P(z)$.

于是公式(6)在所有各情形下已証明.

这个公式的另一証明与差分比相关，并且基于哥西积分，能够把函数 $\frac{1}{\zeta-z}$ 的性質推广到任意的正則函数上去.

把第 15 节中的公式(89)应用到函数 $\frac{1}{\zeta-z}$ 上（其中 ζ 暫时还算作常数）. 因为(不难用完全归納法檢驗)

$$\omega\left(\frac{1}{\zeta-z};z_0,z_1,\cdots,z_m\right)=\frac{1}{(\zeta-z_0)\cdots(\zeta-z_m)}=\frac{1}{A_{m+1}(\zeta)},$$

所以这个公式具有下列形狀

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{m=0}^{n}\frac{A_m(z)}{A_{m+1}(\zeta)}+\frac{A_{n+1}(z)}{(\zeta-z)A_{n+1}(\zeta)}.$$

用求得的 $\frac{1}{\zeta-z}$ 的表达式代入哥西积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

中，得到：

$$f(z)=\sum_{m=0}^{n}A_m(z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{A_{m+1}(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{A_{n+1}(z)}{A_{n+1}(\zeta)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (9)$$

剩下只要注意

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{A_{m+1}(\zeta)}=\omega(f;z_0,z_1,\cdots,z_m)$$

(这可利用归納法証明)，于是(9)式右端的和可化为插补多項式 $P(z)$.

59. 在复数区域中插补过程的收斂性　考慮复数区域中由等式

$$P_n(z_m^{(n)})=f(z_m^{(n)}) \qquad (m=0,1,\cdots,n;\quad n=0,1,2,\cdots) \qquad (10)$$

所表征的無限的插补过程，其中 $f(z)$ 是某一解析函数，它在下面将要說到的区域內是正則的，而 $P_n(z)$ 是唯一地被确定的一些插补函数，只要 $P_n(z)$ 是 n 次有理多項式，这个条件成立。

我們不想包括插补点 $z_m^{(n)}$ 的所有可能分布的情形，以下将作如下的假設。

点 $z_m^{(n)}$ 在 z 平面上是这样地分布的，使得像以前一样，如果令

$$A_n(z)=\prod_{m=0}^{n}(z-z_m^{(n)}),$$

則对于平面上任何的点，極限

$$U(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n(z)|}\geqslant 0 \tag{11}$$

存在，并且在任何有限区域內这个極限关系的收斂性是一致的。

回到表示插补余項的哥西积分

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{A_n(z)}{A_n(\zeta)}\cdot\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{12}$$

我們将假定：

1°. 插补点 $z_m^{(n)}$ 落在簡单閉曲綫——积分閉路 (C)——所包圍的区域 (D) 內。

2°. 变量 z 可以取閉区域 (Δ) 上的各值，(Δ) 是由一个完全落在 (C) 的內部的曲綫 (Γ) 所圍成的（圖 27），并且設 $\delta\ (>0)$ 是曲綫 (C) 与区域 (Δ) 之間的最短距离，因而在积分(12)中有

$$|\zeta-z|\geqslant\delta.$$

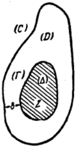


圖 27

3°. 对于区域 (Δ) 中的点 z，$U(z)$ 不超过某一数 $\alpha\ (\geqslant 0)$：

$$U(z)\leqslant\alpha. \tag{13}$$

4°. 在曲綫 (C) 上，$U(z)$ 不小于某一数 $\beta\ (>0)$：

$$U(z)\geqslant\beta. \tag{14}$$

5°. 下列不等式成立：

$$\alpha<\beta. \tag{15}$$

6°. 函数 $f(z)$ 在区域 (D) 內与边界 (C) 上是正則的。

可以断言，在所列举的条件下，插补过程对于区域 (Δ) 中的全部值 z 一致收斂。

事实上，引进記号：L 表曲綫 (C) 的长度，而 M 表函数 $f(z)$ 在曲綫 (C) 上的最大模，我們来估計公式(12)中的积分。于是得到：

$$|R_n(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{(C)}\frac{A_n(z)}{A_n(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant\frac{LM}{2\pi\delta}\frac{\max\limits_{(\Delta)}|A_n(z)|}{\min\limits_{(C)}|A_n(\zeta)|}. \tag{16}$$

可是由不等式(13)，在区域(Δ)中，我們有：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n(z)|}\leqslant\alpha,$$

并且由于在这里假定收斂性是一致的，所以对于足够大的值 $n(n>n_1', \varepsilon>0)$，不論 z 是(Δ)中怎样的点，应該有：

$$|A_n(z)|\leqslant(\alpha+\varepsilon)^n,$$

就是說

$$\max_{(\Delta)}|A_n(z)|\leqslant(\alpha+\varepsilon)^n.$$

另一方面，从不等式(14)，同样地推知，对于足够大的 $n(n>n_1'', \varepsilon>0)$，不論 ζ 在 (C) 上如何，有

$$|A_n(\zeta)|\geqslant(\beta-\varepsilon)^n,$$

就是說

$$\min_{(C)}|A_n(\zeta)|\geqslant(\beta-\varepsilon)^n.$$

由此可見，在公式(16)右端的最后的因子滿足不等式

$$\frac{\max\limits_{(\Delta)}|A_n(z)|}{\min\limits_{(C)}|A_n(\zeta)|}\leqslant\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^n.$$

所以只要选取 ε 小于 $\frac{\beta-\alpha}{2}$，就可使得(16)的右端趋近于零，因而也可使得它的左端趋近于零[在区域(Δ)內是一致的]。

我們假定有一整族曲綫 $U(z)=\text{const}$，其中每条曲綫是閉的，并且把所有的插补点都包在它的內部；如果 $U(z)=C_1$ 与 $U(z)=C_2(C_1<C_2)$ 是这族中两条曲綫，則其中第一条落在第二条的內部。在这种情况下，不論常数 C_1 与 C_2 相差如何小，可以把曲綫 $U(z)=C_1$ 取作 (Γ)，而把曲綫 $U(z)=C_2$ 取作 (C)，自然，这样取是要在函数 $f(z)$ 在最后这曲綫上及其內部是正則的条件下。如果函数 $f(z)$ 在所有滿足 $C<C^*$ 的曲綫 $U(z)=C$ 上是正則的，可是在曲綫 $U(z)=C^*$ 上不再是正則的，則仍然可以肯定，插补过程在曲綫 $U(z)=C^*$ 的內部收斂，虽然这收斂性可能不是一致的。事实上，設 z_0 是在 $U(z)=C^*$ 內部的任何一点。令 $U(z_0)=C_0$ 并且选擇数 C_1 与 C_2，使得不等式 $C_0<C_1<C_2<C^*$ 成立。于是可以取曲綫 $U(z)=C_1$ 当作 (Γ)，而取曲綫 $U(z)=C_2$ 当作 (C)，由此便推出在点 z_0 处的收斂性。

这里所叙述的概要包罗一系列的各种各样的問題。

例 1. 所有的插补点相同：

$$z_n=a \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

逐次的插补多項式是已知函数在点 a 附近的泰乐展开式中不完全的和．因为 $A_n(z)=(z-a)^{n+1}$，所以 $U(z)=|z-a|$．曲綫 $U(z)=\text{const}$ 是以 a 为心的圓．泰乐級数的收斂区域是通过离点 a 最近的奇异点的圓的內部．

例 2. 令

$$z_n=(-1)^n \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

在这情况下，我們得到：$A_{2n}(z)=(z^n-1)^n$，由此可見

$$U(z)=|z^2-1|.$$

等模曲綫 $U(z)=C$ 被双紐綫 $U(z)=1$（它通过原点，原点是它的二重点）分成两类：当 $C<1$ 时得到成双的卵形綫，其中每一綫包圍 -1 与 $+1$ 中一个点；当 $C>1$ 时得到一族簡单的閉曲綫，其中每一綫同时包圍所說的两点（圖 28）．如果函数 $f(z)$ 在由不等式 $U(z)<C^*$ 所确定的区域內是正則的，而在曲綫 $U(z)=C^*$ 上不再是正則的，并且 $C^*>1$，則插补过程在区域 $U(z)<C^*$ 內收斂．

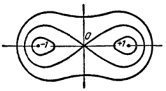


圖 28

我們假設 $C^*<1$．于是曲綫 $U(z)=C^*$ 分解为两卵形綫，称它們为 (C_1^*) 与 (C_2^*)．如果函数 $f(z)$ 在这些卵形綫內是正則的并且代表同一解析函数，則可以求得一条包圍 -1 与 $+1$ 两点的簡单閉曲綫，使在这閉曲綫上及其內部，函数 $f(z)$ 是正則的．設 z 落在 (C) 的內部并且同时落在两卵形綫 (C_1^*) 与 (C_2^*) 之一的內部，我們断定，在这些条件下，插补过程收斂．

有趣的是：我們看出，如果 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 是两个不同的函数，分別在卵形綫 (C_1^*) 与 (C_2^*) 內是正則的，則插补多項式

$$P_{2n}(z)=(z-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}f_1^{(k)}(-1)\cdot\frac{(z+1)^k}{k!}\left\{\left(\frac{1}{z-1}\right)^n\right\}_{(-1)}^{(n-k-1)}+$$
$$+(z+1)^n\sum_{k=0}^{n-1}f_2^{(k)}(+1)\cdot\frac{(z-1)^k}{k!}\left\{\left(\frac{1}{z+1}\right)^n\right\}_{(1)}^{(n-k-1)}$$

当 n 無限增加时在 (C_1^*) 与 (C_2^*) 的內部分別趋近于数值 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$．我們讓讀者去檢驗这一点．

例 3. 在

$$z_n=\omega^n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

（其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{p}}$，$p>2$）的情况下，插补多項式是在第 57 节例 3 中已作出过的．这时 $A_{ln}(z)=(z^p-1)^n$．曲綫 $U(z)=C$ 被玫瑰綫 $U(z)=1$（具有 p 瓣，并以坐标原点为其 p 重点）分成两类：当 $C<1$ 时得到由 p 个卵形綫組合的曲綫，其中每一卵形綫包圍点 $\omega^m(m=0,1,\cdots,p-1)$ 中一个点；当 $C>1$ 时得到一些簡单的閉曲綫，其中每一綫包圍所有的这些点（圖 29）．收斂的現象是和前例中的情形一样的．

例 4. 回到已經考慮过的在綫段$(-1,+1)$上成等距离的基点的(牛頓的)情形:

$$z_m^{(n)}=-1+\frac{2m}{n}\qquad(m=0,1,\cdots,n),$$

同时,为了要研究插补过程在这綫段本身上以及它的外面的收斂性,預先假定函数 $f(z)$ 在这綫段上是正則的(因而在包圍它的某一区域內也是正則的).

令 $\frac{z+1}{2}=Z$,像前面一样,我們得到:

$$A_n(z)=\prod_{m=0}^{n}\left(z+1-\frac{2m}{n}\right)=$$

$$=2^{n+1}\cdot\prod_{m=0}^{n}\left(Z-\frac{m}{n}\right),$$

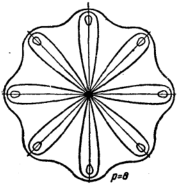


圖 29

而現在擺在我們面前的是要計算(当 $n\to\infty$时)乘积$\prod_{m=0}^{n}\left|Z-\frac{m}{n}\right|$的漸近值,在这里設 Z 不屬于綫段$(0,1)$.

因为

$$\frac{1}{n}\lg\prod_{m=0}^{n}\left|Z-\frac{m}{n}\right|=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\lg\left|Z-\frac{m}{n}\right|\longrightarrow\int_0^1\lg|Z-\xi|\,d\xi,$$

所以(引用代換 $\xi=\frac{t+1}{2}$)我們就得到:

$$\lg U(z)=\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{|A_n(z)|}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\lg|z-t|\,dt.$$

既然在綫段$(-1,+1)$以外,$\int_{-1}^{+1}\lg(z-t)\,dt$ 是 z 的正則函数,那就可以写成

$$\int_{-1}^{+1}\lg|z-t|\,dt=\Re\int_{-1}^{+1}\lg(z-t)\,dt,$$

并且因为

$$\int_{-1}^{+1}\lg(z-t)\,dt=(z+1)\lg(z+1)-(z-1)\lg(z-1)-2,$$

所以得到結果:

$$\lg U(z)=\Re\left\{\frac{1}{2}[(z+1)\lg(z+1)-(z-1)\lg(z-1)]-1\right\},$$

或者,用通常的記号 $z=re^{i\theta}$,

$$\lg U(z)=\frac{1}{2}\left\{(1+r\cos\theta)\lg\sqrt{1+2r\cos\theta+r^2}+\right.$$

$$\left.+(1-r\cos\theta)\lg\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}-r\sin\theta\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right\}-1.$$

我們注意,当点 z 逼近于綫段$(-1,+1)$时,$\lg U(z)$的極限值由公式

$$\lim \lg U(z)=u(z)$$

給出，其中 $u(z)$ 是第 16 节例 2 中所介紹的函数.

曲綫 $U(z)=\text{const}$ 的分布情形在圖 30 中已經表明. 如果函数 $f(z)$ 在通过 -1 与 $+1$ 两点的曲綫 $U(z)=\frac{2}{e}$ 的內部是正則的，那末在整个綫段 $(-1,+1)$ 上甚至在这曲綫所包圍的复数区域內，插补过程收斂. 可是，如果 $f(z)$ 在所說的曲綫內部有奇异点（不过在点 $z=0$ 处是正則的），那就可以指出这样的曲綫 $U(z)=C^*$，其中 $\frac{1}{e}<C^*<\frac{2}{e}$，使得 $f(z)$ 在曲綫 $U(z)=C^*$ 的內部是正則的，但在曲綫本身上不再是正則的；在这情况下，收斂性只在所說的曲綫內部成立，特別，收斂性不在整个綫段 $(-1,+1)$ 上成立，而只在它的某一部分上成立[1].

例 5. 在契比謝夫基点

$$z_m^{(n)}=\cos\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

的情形下，我們得到：

$$A_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(z),$$

并且根据第 4 节中所导出的契比謝夫多項式在基本綫段外的漸近表示，我們由此作出結論：

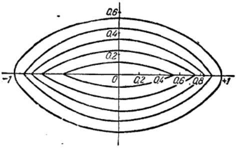


圖 30

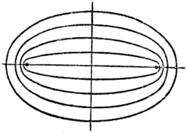


圖 31

$$U(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n(z)|}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T_n(z)|}=\frac{1}{2}\rho,$$

其中 $\rho=|z+\sqrt{z^2-1}|$ 是通过点 z 且以 $-1,+1$ 为焦点的橢圓的两个半軸和. 所以曲綫族 $U(z)=\text{const}$ 与所說的橢圓族相同（圖 31）. 只要函数 $f(z)$ 在綫段 $(-1,+1)$ 上是正則的，則有契比謝夫基点的插补过程一定在整个綫段上收斂；此外，由于在这情况下，函数 $f(z)$ 在包圍这綫段的某一区域內是正則的，所以插补过程也在以 -1 与 $+1$ 为焦点的第一个橢圓內收斂，在这个橢圓上函数不再是正則的.

例 6. 选取 1 的 n 次方根作为插补点：

$$z_m^{(n)}=e^{\frac{2\pi i m}{n}} \qquad (m=0,1,\cdots,n-1).$$

1) 参考 Runge 的著作，見第一章所举出的文献 C. Runge [1].

于是 $A_n(z)=z^n-1$；因此，

$$U(z)=\begin{cases}1, & \text{当}|z|\leqslant 1\text{时},\\ |z|, & \text{当}|z|\geqslant 1\text{时}.\end{cases}$$

曲綫 $U(z)=C$（当 $C>1$ 时）是以原点为中心而半徑大于 1 的圆．插补过程在最小半徑的圆 $|z|=C$ 的內部收斂[如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|\leqslant 1$ 上是正則的]，在这个圆 $|z|=C$ 上，$f(z)$ 不再是正則的．

附注． L. 費叶[1]証明了，不論由簡单閉曲綫 (C) 所包圍的区域 (D) 如何，总可以在边界 (C) 上这样来安置基点 $z_m^{(n)}$，使得对于在区域 (D) 內以及在边界 (C) 上正則的任何函数 $f(z)$，插补过程在整个区域 (D) 中（包括边界在內）收斂．

例 7． 若插补点序列 z_m 有極限

$$\lim_{n\to\infty} z_n=a,$$

則插补过程的收斂性与以 a 为中心的泰乐級数的收斂性是一样的（参考例 1）．

事实上，在这情况下，

$$U(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\prod_{m=0}^{n}(z-z_m)\right|}=|z-a|.$$

例 8． 例 2 中所得的各結果可以推广到使

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n}=+1,\qquad \lim_{n\to\infty} z_{2n+1}=-1$$

的插补过程上去．

例 9． 例 4 的各个結果可以推广到插补点在綫段 $(-1,+1)$ 上分布得具有均匀的密度的情形，也就是由等式

$$\psi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(x,x+\Delta x)}{n}$$

所定义的函数 $\psi(x)$ 化为常数的情形（在例 4 中这个常数是 $\frac{1}{2}$），其中 $N_n(\alpha,\beta)$ 表示落在区間 (α,β) 中的点 $z_m^{(n)}$ $(0\leqslant m\leqslant n)$ 的个数．点 $z_m^{(n)}$ 也可以不在綫段 $(-1,+1)$ 上，只要 $z_m^{(n)}$ 的虛部一致地（关于 m）趋近于零；在这情况下，$N_n(\alpha,\beta)$ 应該理解为满足不等式 $\alpha<\Re z_m^{(n)}<\beta$ 的点 $z_m^{(n)}$ 的个数．

例 10． 例 5 的各个結果可以推广到前例中所定义的函数 $\psi(x)$ 等于 $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ 的各种情形．特別，对于雅谷比多項式的零点系（在参数的任何值之下），这是成立的．

60. 插补修正因子 从前节可知，由要求 (10) 所表征的插补过程的收斂区域，一般說来，旣依賴于函数 $f(z)$ 的性質，也依賴于插补点 $z_m^{(n)}$ 的分布．确切地說，在保持条件 (11) 时点組 $z_m^{(n)}$ 決定曲綫族 $U(z)=C$，而插补过程的收斂区域具有 $U(z)<C^*$ 形状，并且参数值 $C=C^*$ 依賴于函数 $f(z)$ 的性質．

我們以后将見到，插补过程可以这样地改变，使得对于同样的插补点 $z_m^{(n)}$，曲綫

族 $U(z)=C$ 可用另一曲綫族 $W(z)=C$ 所代替，而后一族曲綫的选擇在頗大程度上是任意的。

我們把表征着插补过程的要求(10)用如下的要求来代替：插补法是借助于函数序列$\{f_n(z)\}$来进行的，其中各函数 $f_n(z)$ 具有下面的形状

$$f_n(z)=\mu_n(z)P_n(z); \tag{17}$$

在这里各个函数 $\mu_n(z)$（"插补修正因子"）在所考慮的区域范圍內是正則的并且异于零，而 $P_n(z)$ 是由条件

$$P_n(z_m^{(n)})=\frac{f(z_m^{(n)})}{\mu_n(z_m^{(n)})} \tag{18}$$

唯一地确定的 n 次多項式。

关于函数 $\mu_n(z)$，我們 $\left(\text{像对于多項式 } A_n(z)=\prod_{m=0}^{n}(z-z_m^{(n)}) \text{ 一样}\right)$ 作出假設如下：在任何有限区域內存在着一致的極限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\mu_n(z)|}=V(z)\geqslant 0. \tag{19}$$

現在来考慮沿閉曲綫(C)的积分

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f(\zeta)\frac{A_n(z)\mu_n(z)}{A_n(\zeta)\mu_n(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \tag{20}$$

并且将假定曲綫(C)位于使函数 $f(z)$ 及 $\mu_n(z)$ 是正則的一个区域內，而这个曲綫既包圍着点 z，也包圍着所有的插补点 $z_m^{(n)}$。这积分等于关于極点 z 与 $z_m^{(n)}\ (m=0,1,\cdots,n)$ 的殘数之和。因为对应于極点 z 的殘数等于 $f(z)$，而对应于極点 $z_m^{(n)}$ 的殘数是

$$f(z_m^{(n)})\frac{A_n(z)\mu_n(z)}{A_n'(z_m^{(n)})\mu_n(z_m^{(n)})}\frac{1}{z_m^{(n)}-z},$$

所以我們得到：

$$R_n(z)=f(z)-\mu_n(z)\sum_{m=0}^{n}\frac{f(z_m^{(n)})}{\mu_n(z_m^{(n)})}\frac{A_n(z)}{A_n'(z_m^{(n)})(z-z_m^{(n)})};$$

注意到这个和不是別的，而是由条件(18)所确定的插补多項式，由此便得：

$$R_n(z)=f(z)-\mu_n(z)P_n(z).$$

于是 $R_n(z)$ 是所考慮的插补式的余項。回过来估計这余項。

我們假定(像在第 59 节一样)变量 z 落在被曲綫(Γ)所包圍并且整个位于(C)的內部的区域(Δ)內，且(C)与(Δ)之間的最小距离是正的：

$$|\zeta-z|\geqslant\delta, \qquad \delta>0.$$

在这种情形下由积分表达式(20)可知

$$|R_n(z)| < \frac{LM}{2\pi\delta} \cdot \frac{\max\limits_{(\Delta)} |A_n(z)\mu_n(z)|}{\min\limits_{(C)} |A_n(z)\mu_n(z)|}, \tag{21}$$

其中 L 是曲綫(C)的长度而 M 是$|f(z)|$在(C)上的極大值.

如果对于区域(Δ)中的点 z, 乘积

$$W(z) \equiv U(z)V(z) \tag{22}$$

不超过数 α, 而在曲綫(C)上它又不小于 β, 并且 $\alpha<\beta$, 则和以前一样, 我們不难証实, 对于足够大的 n, 不等式(21)的右端小于

$$\frac{LM}{2\pi\delta}\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^n,$$

其中 ε 是任意小的数, 所以 $R_n(z)$ 在(Δ)内一致趋近于零.

这样, 插补过程 $f_n(z)\to f(z)$ 在(Δ)内是一致收斂的, 只要不违背前面所說的要求而能够选擇曲綫(C), 使得不等式

$$\max_{(\Delta)} W(z) < \min_{(C)} W(z) \tag{23}$$

保持成立.

在特別情形下, 如果曲綫 $W(z)=C$ 形成一族具有以下性質的曲綫: 它們全部是閉的, 并且当 $C_1<C_2$ 时, 曲綫 $W(z)=C_1$ 落在曲綫 $W(z)=C_2$ 的內部, 那么可以取其中第一个曲綫的內部連同边界一起当作(Δ), 而取第二个曲綫当作(C).

如果修正因子 $\mu_n(z)$都等于 1 ("不出現"), 则我們得到第 59 节中所述的理論.

例. 設

$$\mu_n(z)=\frac{1}{(1-z)^n} \qquad (n\geqslant 0),$$

另一方面, 設 $A_n(z)=z^n$, 于是提出了泰乐級数的"修正"問題. 在这情况下, 多項式 $P_n(z)$ 由下面修正的条件(18)来決定:

$$P_n^{(m)}(0)=\left\{\frac{d^m}{dz^m}[f(z)(1-z)^n]\right\}_{z=0},$$

因而 $P_n(z)$不是別的, 而是函数 $f(z)(1-z)^n$ 按 z 的冪的展开式中 n 个項的部分和. 如果

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

则

$$P_n(z)=c_0+(c_1-C_n^1c_0)z+(c_2-C_n^1c_1+C_n^2c_0)z^2+\cdots+$$
$$+\left(c_n-C_n^1c_{n-1}+C_n^2c_{n-2}+\cdots+(-1)^nC_n^nc_0\right)z^n,$$

而插补函数(已不是多項式)具有下面的形状

$$f_n(z)=\frac{P_n(z)}{(1-z)^n}.$$

因为在我們的例中，

$$U(z)=|z|,\qquad V(z)=\frac{1}{|1-z|},\qquad W(z)=\left|\frac{z}{1-z}\right|,$$

所以曲綫族 $W(z)=\text{const}$ 是由一束圓周

$$|z|=C|1-z|$$

作成的，这些圓周对于插补过程 $f_n(z)\to f(z)$ 所起的作用，与以原点为中心的圓周对于按 z 的冪的泰乐展开式所起的作用相同：如果函数 $f(z)$ 在区域 $W(z)<C^*$ 內是正則的，但在圓 $W(z)=C^*$ 上不再是正則的，那末插补过程在条件 $W(z)<C^*$ 之下收斂而在条件 $W(z)>C^*$ 之下發散.

61. 用各級导数的插补法的誤差估計 在第 18 节中就实数域情形所导出的用各級导数的插补法的同一个公式，可以不加改变而在复数域中保持有效. 就是說，不論 $f(z)$ 是怎样一个在某一区域 (D) 內的单值正則函数，等式

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(z_k)L_k(z)+R_n(z) \tag{24}$$

正确，并且所有的点 $z_k\,(0\leqslant k\leqslant n)$ 假定屬于区域 (D)，多項式 $L_k(z)$ 是由等式

$$L_k(z)=\int_{z_0}^{z}dz'\int_{z_1}^{z'}dz''\cdots\int_{z_{k-1}}^{z^{(k-1)}}dz^{(k)} \tag{25}$$

（积分路徑是無关紧要）来确定的，而余項 $R_n(z)$ 可以表成下列形状

$$R_n(z)=\int_{z_0}^{z}dz'\int_{z_1}^{z'}dz''\cdots\int_{z_n}^{z^{(n)}}f^{(n+1)}(z^{(n+1)})\,dz^{(n+1)}, \tag{25'}$$

其中积分路徑不越出区域 (D) 的范圍.

以后，在进行余項的估計时，我們对于区域 (D) 作如下的特別的假設，那就是它或者与全平面重合，或者至少具有凸性（就是說每一个連接这区域中任意两点的綫段屬于这个区域）.

对于余項的估計可以进行如下.

用 l_0 表示連接 z 与 z_0 两点的直綫段，用 l_1 表示連接 z_0 与 z_1 的綫段，等等，最后，用 l_n 表示連接 z_{n-1} 与 z_n 的綫段. 設 (L_n) 是由綫段 $l_0, l_1, \cdots, l_n$ 所組成的折綫[1]. 用 M_{n+1} 表示 $f^{(n+1)}(z)$ 在边界 (L_n) 上的最大模. 我們按照点 z_k 的指标减小的方向来計算公式 (25′) 中沿折綫 (L_n) 的积分. 令

$$t_i=|z_n-z_{n-1}|+|z_{n-1}-z_{n-2}|+\cdots+|z_{i+1}-z_i|$$

1) 如果变数 z 与所有的 z_k 是实数，那么"折綫" (L) 由实軸上有向綫段所組成，这些綫段能够完全地或部分地一个落在另一个之上.

$$(i=0,1,\cdots,n-1),$$

$$t_n=0,\qquad t=t_0+|z-z_0|,$$

并用$t^{(k)}(k=1,2,\cdots,n+1)$表示折綫 $z_nz^{(k)}$的长度［算作这折綫是沿着边界(L_n)的］，我們有：

$$|R_n(z)|\leqslant\int_{t_0}^{t}dt'\left|\int_{z_1}^{z'}dz''\int_{z_2}^{z''}dz'''\cdots\int_{z_n}^{z^{(n)}}f^{(n+1)}(z^{(n+1)})\,dz^{(n+1)}\right|,$$

$$\left|\int_{z_1}^{z'}dz''\int_{z_2}^{z''}dz'''\cdots\int_{z_n}^{z^{(n)}}f^{(n+1)}(z^{(n+1)})\,dz^{(n+1)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_1}^{t'}dt''\left|\int_{z_2}^{z''}dz'''\cdots\int_{z_n}^{z^{(n)}}f^{(n+1)}(z^{(n+1)})\,dz^{(n+1)}\right|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\int_{z_n}^{z^{(n)}}f^{(n+1)}(z^{(n+1)})\,dz^{(n+1)}\right|\leqslant M_{n+1}\int_{t_n}^{t^{(n)}}dt^{(n+1)}.$$

因此，

$$|R_n(z)|\leqslant M_{n+1}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_1}^{t'}dt''\cdots\int_{t_n}^{t^{(n)}}dt^{(n+1)}.$$

因为显然有

$$t_0\leqslant t'\leqslant t,\qquad t_1\leqslant t''\leqslant t',\qquad\cdots,\qquad t_n\leqslant t^{(n+1)}\leqslant t^{(n)};\qquad t_{i+1}\leqslant t_i\qquad(0\leqslant i\leqslant n-1),$$

所以，如果用 $t_n=0$ 来替代所有的积分下限，那么最后的积分不会减小，由这就可推得

$$|R_n(z)|\leqslant M_{n+1}\int_0^{t}dt'\int_0^{t'}dt''\cdots\int_0^{t^{(n)}}dt^{(n+1)}=M_{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

在这里，当所有的点 $z_0,\ z_1,\cdots,\ z_n$ 重合时，等号就达到．注意到 t 的值，我們最后得到：

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(|z-z_0|+s_n)^{n+1},\tag{26}$$

其中

$$s_m=|z_0-z_1|+|z_1-z_2|+\cdots+|z_{m-1}-z_m|\qquad(m=1,2,\cdots).$$

用同样的方法可以断定

$$|L_n(z)|=\left|\int_{z_0}^{z}dz'\int_{z_1}^{z'}dz''\cdots\int_{z_{n-1}}^{z^{(n-1)}}dz^{(n)}\right|<\frac{1}{n!}(|z-z_0|+s_{n-1})^n.\tag{27}$$

由不等式(26)得知,积分的誤差大小依賴于和数 s_n 增大的速度。如果不論 z 在某一区域(D)内如何,$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(z)|=0$,那么函数 $f(z)$ 在这区域內可以展开成一致收斂的級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(z_n)L_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(z_n)\int_{z_0}^{z}dz'\int_{z_1}^{z'}dz''\cdots\int_{z_{n-1}}^{z^{(n-1)}}dz^{(n)}. \tag{28}$$

例 1. 如果和 s_m 是有界的,就是說級数 $\sum|z_{m-1}-z_m|$ 收斂,因而極限 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=Z$ 存在,并且如果函数 $f(z)$ 在以 Z 为中心与 R 为半徑的圓內是正則的,那么 $f(z)$ 在所說的圓內任一閉区域上可以展开成一致收斂的級数(28)。

为簡单起見,我們假定 $Z=0$。

我們首先來証实級数(28)在圓 $|z|\leqslant R'$ (其中 $0<R'<R$) 上一致收斂。設 R'' 滿足不等式 $R'<R''<R$。令

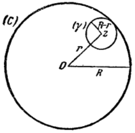


圖 32

$$\rho_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}|z_\nu-z_{\nu+1}|.$$

我們来选擇这样大的 N,使得

$$\rho_N<\frac{1}{2}(R''-R'). \tag{29}$$

用 $M(f,r)$ 表示函数 $f(z)$ 在圓 $|z|=r$ 上的最大模,我們会有不等式

$$\frac{M(f^{(n)},r)}{n!}<\frac{M(f,R)}{(R-r)^n}\text{ 1)}\qquad (r<R). \tag{30}$$

考慮(28)右端的級数經过 N 次微分后所得到的級数。对于足够大的 n ($|z_n|<R''$ 并且 $n>N$),利用不等式(30)我們得到对于这个級数的一般項的估計如下:

$$|f^{(n)}(z_n)L_n^{(N)}(z)|\leqslant M(f^{(n)},|z_n|)\cdot|L_n^{(N)}(z)|<$$

$$<(n-N)!\,\frac{M(f^{(N)},R'')}{(R''-|z_n|)^{n-N}}\cdot\frac{1}{(n-N)!}(|z-z_N|+|z_N-z_{N+1}|+\cdots+|z_{n-2}-z_{n-1}|)^{n-N}.$$

因为

$$|z-z_N|\leqslant|z|+|z_N|\leqslant R'+\rho_N$$

并且

1) 設 $|z|=r<R$。于是由哥西积分可得等式:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},$$

其中积分路綫可以取作圓(γ):

$$|\zeta-z|=R-r$$

(圖 32)。从这等式推出:

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}<\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi(R-r)\cdot\frac{M(f,R)}{(R-r)^{n+1}}=\frac{M(f,R)}{(R-r)^n}.$$

因为 z 是具有模 r 的任意的数,所以由此也推出不等式(30)。

$$|z_N-z_{N+1}|+\cdots+|z_{n-2}-z_{n-1}|\leqslant\rho_N,$$

所以最后得

$$|f^{(n)}(z_n)L_n^{(N)}(z)|\leqslant M(f^{(N)},R'')\cdot\left(\frac{R'+2\rho_N}{R''-|z_n|}\right)^{n-N}.$$

根据(29)，右端括号内的分数从某一时起将变得小于 1，因而所考虑的級数在圓 $|z|\leqslant R'$ 上一致收斂．可是在这种情况下，(28)的右端的級数也一致收斂，因而它是一个在圓域 $|z|<R$ 內的正則函数．

轉而考虑級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(z_n)L_n^{(N)}(z)$$

的余項，我們这时根据条件

$$\rho_N<\frac{R'}{4}\qquad(0<R'<R)$$

来选擇数 N，并假設

$$|z|\leqslant\frac{R'}{4}.$$

于是由公式(26)，得

$$|R_n^{(N)}(z)|<\frac{1}{(n-N)!}M\left(f^{(n)},\ \frac{R'}{4}\right)(|z-z_N|+\rho_N)^{n-N}<$$

$$<\frac{M(f^{(N)},R')}{\left(R'-\frac{R'}{4}\right)^{n-N}}(|z|+2\rho_N)^{n-N}\leqslant M(f^{(N)},R')\left(\frac{\frac{R'}{4}+2\rho_N}{\frac{3}{4}R'}\right)^{n-N}.$$

因为

$$\frac{\frac{R'}{4}+2\rho_N}{\frac{3}{4}R'}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|R_n^{(N)}(z)|=0.$$

由此断定(仍然对于 $|z|\leqslant\frac{R'}{4}$)

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(z)|=0.$$

于是当 $|z|\leqslant\frac{R'}{4}$ 时恒等式(28)成立．可是由于它的两端都是在圓 $|z|<R$ 內的正則函数，所以它在这整个圓內也成立．

例 2. 对于函数 $f(z)=e^z$，我們有形式上的展开式(28)：

$$e^z\sim e^{z_0}+e^{z_1}L_1(z)+e^{z_2}L_2(z)+\cdots+e^{z_n}L_n(z)+\cdots,$$

其中各多項式 $L_n(z)$ 由公式(25)确定．为确定起見，設 $0\leqslant z_0\leqslant z_1\leqslant\cdots$，我們要查明对于点 z_n 需要再加上怎样的限制，就使得在任何有限区域內，一致收斂性成立．

如果令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{z_n}{n}=\tau, \tag{31}$$

那么有条件

$$\tau e^{\tau+1}<1 \qquad 或者 \qquad \tau<0.278\cdots \tag{32}$$

就够了．

事实上，当 $|z|<R$ 时，不等式(26)具有下面的形状：

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{e^{z_n}}{(n+1)!}(R+z_n)^{n+1}.$$

由(31)推知，当 n 足够大时，

$$z_n<n(\tau+\varepsilon),$$

因而

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{e^{n(\tau+\varepsilon)}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n}[R+n(\tau+\varepsilon)]^{n+1}=[R+n(\tau+\varepsilon)]\cdot\left[\left(\tau+\varepsilon+\frac{R}{n}\right)e^{\tau+1+\varepsilon}\right]^n.$$

如果 τ 满足条件 (32)，那么最后这个不等式的右端显然趋近于零，因为在括号內的数量当 n 足够大时小于 1．

例 3.　令 $f(z)=\lg(1+z)$ 与 $z_n=nh(h>0)$，我們有形式上的阿倍尔級数展开式：

$$\lg(1+z)\sim z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(z-nh)^{n-1}}{(1+nh)^n}. \tag{33}$$

这个級数是否是收斂的？又是否表示函数 $\lg(1+z)$？

我們看出，当 $|z|\leqslant R$ 时

$$\left|z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(z-nh)^{n-1}}{(1+nh)^n}\right|=\left|z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(nh+1)}\left(\frac{1-\frac{z}{nh}}{1+\frac{1}{nh}}\right)^{n-1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(nh+1)}\left(\frac{1+\frac{R}{nh}}{1+\frac{1}{nh}}\right)^{n-1},$$

并且因为極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{R}{nh}}{1+\frac{1}{nh}}\right)^{n-1}=e^{\frac{R-1}{h}}$$

是有限的，所以在一般項的分母中有 n 的二乘方就保証了級数在任何有限区域內一致收斂．由此

可見，在(33)的右端的級数表示一个整函数．正因为如此，它的和無論在什么区域內都不能等于 $\lg(1+z)$（在单独一点 $z=0$ 处等式成立）：事实上，假如在某一区域內(33)的两端恒等，那末这个恒等式就可以解析开拓到整个平面上去，但这是不可能的，因为左端的 $\lg(1+z)$ 有临界点 $z=-1$[1]．

62. 与維尔斯德拉斯第一及第二定理相对应的两个定理[2]

定理 1. 如果 $f(z)$ 是复变数 z 的函数，在简单閉曲綫 C 所包圍的区域 D 內是正則的，也在这曲綫上是正則的，那么無論 $\varepsilon(>0)$ 是怎样小的数，可以指出这样的多項式 $P(z)$，使得对于閉区域 $(\overline{D})\equiv(D)+(C)$ 上所有的值 z，不等式

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon \tag{34}$$

成立．

換句話說，在区域 $(\overline{D})$ 上函数 $f(z)$ 可以展开成一致收斂的多項式級数．

定理 2. 如果 $f(z)$ 是复变数 z 的函数，有周期 2π，并且在两条無限的具有周期 2π 的曲綫 (Γ_1) 与 (Γ_2) 所夹的单連通区域 Δ 內正則，同时在这两条曲綫上也正則（圖 25，第 270 頁），那么無論 $\varepsilon(>0)$ 是怎样小的数，可以指出这样的三角多項式 $T(z)$，使得对于閉区域 $(\overline{\Delta})\equiv(\Delta)+(\Gamma_1)+(\Gamma_2)$ 上所有的值 z，不等式

$$|f(z)-T(z)|<\varepsilon \tag{35}$$

成立．

換句話說，在区域 $(\overline{\Delta})$ 上函数 $f(z)$ 可以展开成一致收斂的三角多項式級数．

定理 1 的証明是以应用哥西积分作基础．假定点 ζ 落在区域 $\overline{D}$ 之外，我們首先来証明这个定理对于函数

$$f(z)=\frac{1}{\zeta-z}$$

来說是正确的．开始考虑最簡单的情形，就是当点 ζ 在这样的位置，存在有某一直綫 (d) 把它与区域 $(\overline{D})$ 隔离开来（圖 33）．这时显然可以指出一个圓周 (Γ)，它包圍着 $(\overline{D})$ 而不包圍 ζ；設它的中心是 a．因为冪展开式

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3}+\cdots$$

当 $|z-a|<\rho|\zeta-a|$（其中 $0<\rho<1$）时一致收斂，所以它也在区域 $(\overline{D})$ 上一致收斂．取这展开式的足够多的項之和，我們就得到所求的多項式 $P(z)$．

我們注意，对于更一般形状的函数

1) 参考前面（第 81 頁）所引証的 Abel 的著作；又見 G. H. Halphen, Sur une série d'Abel (Comptes Rendus Acad. Sc., **93**, 第 1003 頁)．

2) K. Weierstrass 沒有發現在复数域中与其自己的定理相类似的定理．K. Runge 大約在 Weierstrass 的同时开始研究了这个問題．下面所引的定理 1 是他所建立的一些結果中的特別情形．参考 Runge[1]．

$$f(z)=\frac{A}{(\zeta-z)^n} \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

也显然可得到同样的結果，因而对于变量$\frac{1}{\zeta-z}$的任何多項式也可得到同样的結果。

現在假定，具有上述的性質的直綫(d)不存在(圖 34)。因为区域$(\overline{D})$落在有限

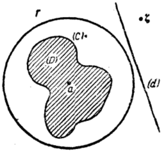


圖 33

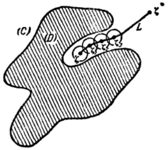


圖 34

的距离內，所以一样可以求得这样的点ζ^*，使得某一直綫(d)把它与区域$(\overline{D})$隔离开来。用一条不与$(\overline{D})$有公共点的曲綫(L)把点ζ与ζ^*連接起来；設δ是它与边界(C)的距离。在曲綫(L)上来取一列的点

$$\zeta=\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\cdots,\zeta_r=\zeta^*,$$

使得相邻的两点間的距离小于δ。把函数$\frac{1}{\zeta-z}$按照新变数

$$z_1=\frac{1}{z-\zeta_1}$$

的羃展开，我們得到：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta_1-z}-\frac{\zeta-\zeta_1}{(\zeta_1-z)^2}+\frac{(\zeta-\zeta_1)^2}{(\zeta_1-z)^3}-\cdots,$$

并且当$|z-\zeta_1|>|\zeta-\zeta_1|$(其中$|\zeta-\zeta_1|=|\zeta_0-\zeta_1|<\delta$)时收斂性成立，因而，特别，收斂性在区域$(\overline{D})$上（一致地）成立。取最后这个級数的足够多的項，我們就得到有下列性質的多項式$P_1(z_1)\equiv P_1\left(\frac{1}{z-\zeta_1}\right)$(次数为$n_1$)，对于区域$(\overline{D})$中任何的值$z$，

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-P_1\left(\frac{1}{z-\zeta_1}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2r}. \tag{36}$$

由此可見，函数$\frac{1}{\zeta-z}$可由有限多个形如$\frac{A_m}{(\zeta_1-z)^m}$ $(m=0,1,\cdots,n_1)$的項的綫性組合所代替，并且誤差[在区域$(\overline{D})$中]不超过数$\frac{\varepsilon}{2r}$。

我們可以重复上面对于每个項$\frac{A_m}{(\zeta_1-z)^m}$的論証，用变数

$$z_2=\frac{1}{z-\zeta_2}$$

的某一个多項式来替代它，使得在区域$(\overline{D})$中的誤差不会超过$\frac{\varepsilon}{2r(n_1+1)}$，因而整个多項式$P_1(z_1)$被新的多項式$P_2(z_2)$所代替，并且不等式

$$\left|P_1\left(\frac{1}{z-\zeta_1}\right)-P_2\left(\frac{1}{z-\zeta_2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2r}$$

成立。

繼續进行这种手續，我們得到一系列的多項式$P_k\left(\frac{1}{z-\zeta_k}\right)$，它們滿足不等式

$$\left|P_k\left(\frac{1}{z-\zeta_k}\right)-P_{k+1}\left(\frac{1}{z-\zeta_{k+1}}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2r}\qquad(k=1,2,\cdots,r-1). \tag{37}$$

最后，因为由假設点$\zeta_r=\zeta^*$与区域$(\overline{D})$为直綫(d)所隔开，我們就可以选得这样的多項式$P(z)$，使得

$$\left|P_r\left(\frac{1}{z-\zeta_r}\right)-P(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

于是由不等式(36)，(37)与(38)推得

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-P(z)\right|<\varepsilon. \tag{39}$$

現在来在一般的情况下証明定理1. 我們注意，函数$f(z)$不但假定在区域$(\overline{D})$的內部是正則的，而且在它的边界上也是正則的，因此可以指出簡單的閉曲綫(C')，使它包圍着(C)并且具有下列性質：$f(z)$在(C')的內部以及(C')上都是正則的。写出哥西积分：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{40}$$

用$\omega(\delta)$表示函数$f(\zeta)$在边界(C')上的連續模，不难証实，函数

$$f_1(\zeta)\equiv\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

在同一边界上具有不依賴于z的連續模$\omega_1(\delta)$[如果z落在曲綫(C)上或其內部]。事实上，当$|\zeta'-\zeta''|\leqslant\delta$时，我們得到：

$$f_1(\zeta')-f_1(\zeta'')=\frac{1}{2\pi i}\cdot\left[\frac{f(\zeta')-f(\zeta'')}{\zeta'-z}-f(\zeta'')\frac{\zeta'-\zeta''}{(\zeta'-z)(\zeta''-z)}\right],$$

所以

$$|f_1(\zeta')-f_1(\zeta'')|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\omega(\delta)}{\eta}+\frac{M\delta}{\eta^2}\right],$$

其中 η 是 (C) 与 (C') 之間的距离，而 M 是函数 $f(\zeta)$ 在边界 (C') 上的最大模．因为最后这个不等式的右端随着 δ 趋近于零，所以它可以用来代替函数 $f_1(\zeta)$ 的連續模 $\omega_1(\delta)$．

設 ε 是任意小的数．在边界 (C') 上安置这样密的点 $\zeta_k\,(k=0,1,\cdots,m)\,(\zeta_0=\zeta_m)$，使得相邻的两点間的距离 δ 滿足不等式

$$\omega_1(\delta)<\frac{\varepsilon}{2L'},\tag{41}$$

其中 L' 是 (C') 的长度．

于是在公式(40)右端的哥西积分可以用形如

$$\frac{1}{2\pi i}\sum\frac{f(\zeta_k)\Delta\zeta_k}{\zeta_k-z}$$

的有限和来代替，使得誤差不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k-z}\Delta\zeta_k\right|\leqslant\omega_1(\delta)\cdot L'<\frac{\varepsilon}{2}\text{[1]}.\tag{42}$$

可是由前所証，和式的每一項在区域 $(\overline{D})$ 中可以用多項式来逼近：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta_k)\Delta\zeta_k}{\zeta_k-z}-P_k(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2m}.$$

由此推得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(\zeta_k)\Delta\zeta_k}{\zeta_k-z}-P(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{43}$$

其中

$$P(z)=\sum_{k=0}^{m-1}P_k(z).$$

于是由(40)，(42)与(43)推得

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon.\tag{44}$$

我們注意，函数 $f(z)$ 在边界 C 上解析这一要求不是必要的．只要假定函数 $f(z)$ 在区域 (D) 內解析，在閉区域 $(\overline{D})$ 上連續就可以了．我們在这里要引用在这意义下推广了的定理 1 的証明[2]，但只討論最簡单的而同时又是特别重要的情形，那就是在

1) 参考第 2 节不等式(19)．

2) 参考 J. L. Walsh[1]，第 36 頁．

区域 (D) 內存在着具有这样的性質的点，从这点出發所引出的一切射綫都只与边界 (C) 相交于一点。不失一般性，可以假定这个点是坐标原点。

变换（以原点为中心的相似变換）

$$z'=\frac{n+1}{n}z$$

把具有边界 (C) 的区域 (D) 映射成具有边界 (C_n) 的区域 (D_n)。于是函数 $f(\frac{n}{n+1}z)$ 在閉区域 $(\overline{D}_n)\equiv(D_n)+(C_n)$ 上是确定的；它在区域 (D_n) 內正則，而且在 $(\overline{D}_n)$ 上連續。所以根据定理 1，不論 ε 是怎样小的数，可以选得这样的多項式 $P(z)$，使得在区域 $(\overline{D})$ 上我們会有：

$$\left|f\left(\frac{n}{n+1}z\right)-P(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，因为由区域 $(\overline{D})$ 的閉合性知函数 $f(z)$ 在 $(\overline{D})$ 上一致連續，所以函数 $f\left(\frac{n}{n+1}z\right)$ 在 $(\overline{D}_n)$ 上一致連續，因此，对于足够大的 $n(n>n_0)$，关系式

$$\left|f\left(\frac{n}{n+1}z\right)-P(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

在 $(\overline{D}_n)$ 上成立，它在 $(\overline{D})$ 上更加成立。于是由最后两个不等式，当 $n>n_0$ 时，我們在区域 $(\overline{D})$ 上得到

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon,$$

这就是所需要証明的[1]。

定理 2 的証明以定理 1 的如下的推广作基础。設函数 $f(z)$ 在环形区域 (D) 內正則，这个区域是由两条簡单閉曲綫 (C_1) 与 (C_2) 所范圍的，其中第一条綫落在第二条綫的內部并且把坐标原点包含在其內部（圖 35）；此外，設 $f(z)$ 也在这些曲綫上正則。于是 $f(z)$ 在区域 $(\overline{D})\equiv(D)+(C_1)+(C_2)$ 上可以用具有唯一的极点 $z=0$ 的有理函数来一致逼近：

$$|f(z)-R(z)|<\varepsilon,$$

其中

$$R(z)=\sum_{m=-n}^{+n}c_mz^m.$$

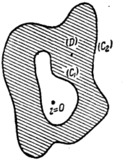


圖 35

为了要証实这一点，我們預先也要注意到：如果点 ζ 以及原点 $z=0$ 落在簡单閉

1) 关于定理 1 的进一步的推广参考 С. Н. Мергелян[1].

曲綫(C)的內部，那么在这曲綫外部以及这曲綫上的点所成的区域上，由不等式

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-P\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\varepsilon,$$

函数$f(z)=\frac{1}{\zeta-z}$的一致逼近成立，其中$P\left(\frac{1}{z}\right)$是关于变数$\frac{1}{z}$的多项式．这可以作为定理1[不等式(34)]的推論很容易地推出来，只要把定理1应用到落在曲綫(C')內的区域[(C')是由(C)經过映射$z'=\frac{1}{z}$得到的]以及函数$f(z')=\frac{z'\zeta'}{z'-\zeta'}$的情形（其中$\zeta'=\frac{1}{\zeta}$）．

我們現在把在环形区域$(\overline{D})$上正則的函数$f(z)$表成由哥西积分分解而成的两个积分之差：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_2)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

首先用新的(C_2')与(C_1')来代替积分路徑(C_2)与(C_1)[其中(C_2')把(C_2)包在其內部，而(C_1')則包含在(C_1)的內部，并且函数$f(z)$在这样作成的扩大区域內不再是正則的]，然后用积分的近似和来代替积分，我們看出，沿界綫(C_2')所取的第一个积分像以前一样可以用变数z的某一多項式$P(z)$来逼近；至于沿界綫(C_1')所取的第二个积分，則根据上述的説明，它可用变数$\frac{1}{z}$的某一多項式$Q\left(\frac{1}{z}\right)$来逼近．令

$$P(z)+Q\left(\frac{1}{z}\right)=R(z),$$

我們就得到所求的有理函数．

要想証明定理2，現在只要再采取一个步驟就够了，那就是：利用变数代換

$$Z=e^{iz}$$

我們把z平面上夹在两条無限曲綫(Γ_1)与(Γ_2)中間的带形区域(Δ)映射成Z平面上夹在两条閉曲綫(C_1)与(C_2)中間的环形区域(D)．函数

$$F(Z)\equiv f\left(\frac{1}{i}\lg Z\right)$$

在区域(D)中（包括它的边界在內）是单値正則的，因而可以找到这样的有理函数$R(z)$，它的形狀是

$$R(z)=\sum_{-n}^{+n}c_mZ^m,$$

使得在区域(D)中，

$$\left|f\left(\frac{1}{i}\lg Z\right)-R(Z)\right|<\varepsilon.$$

由此可見，在区域(Δ)中(包括边界在內)，不等式

$$|f(z)-T(z)|<\varepsilon \tag{45}$$

成立，其中

$$T(z)=R(e^{iz})=\sum_{-n}^{+n} c_m e^{imz}$$

是三角多項式．

63. 在复数区域中的平方逼近法．齐各多項式与加列曼多項式　設在复数平面中給定了彼此不同的一些点

$$z_j \qquad (j=0,1,2,\cdots,m);$$

此外，設再給定了某些复数

$$w_j \qquad (j=0,1,2,\cdots,m).$$

試选擇一个n次$(n\leqslant m)$多項式$P(z)$，使它把和数

$$\sum=\sum_{j=0}^{m}|P(z_j)-w_j|^2 \tag{46}$$

变成極小．这个問題是在第29节中所考慮过的問題的自然推广．如果令

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu \qquad (c_\nu=c'_\nu+ic''_\nu), \tag{47}$$

其中c_ν是任意的复数，那么我們得出結論：和数$\sum$是实变数c'_ν与c''_ν的、亦即未知系数$c_\nu(\nu=0,1,\cdots,n)$的实部与虛部的不取負值的函数．因为这个函数显然是二次多項式，所以最小值必然存在，并且它可利用方程組

$$\frac{\partial\sum}{\partial c'_\nu}=0, \qquad \frac{\partial\sum}{\partial c''_\nu}=0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n) \tag{48}$$

的解去求得．另一方面，我們注意，和数$\sum$可写成下列形状

$$\sum=\sum_{j=0}^{m}[P(z_j)-w_j][\overline{P(z_j)}-\overline{w}_j],$$

其中短横綫标記共軛数，因此，譬如說

$$\overline{P(z_j)}=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{c}_\nu\,\overline{z}_j^\nu \qquad (\overline{c}_\nu=c'_\nu-ic''_\nu).$$

一般地說，如果我們要求依賴于复变数$Z=X+iY$与共軛复变数$\overline{Z}=X-iY$的某一函数$F(Z,\overline{Z})$的最小值，那么最小值的条件

$$\frac{\partial F}{\partial X}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y}=0$$

与下面的条件是等价的：

$$\frac{\partial F}{\partial Z}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}=0.$$

这可由

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{\partial F}{\partial Z}+\frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y}=i\left(\frac{\partial F}{\partial Z}-\frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}\right)$$

推出来．所以方程組(48)可以这样来代替：

$$\frac{\partial \sum}{\partial c_\nu}=0, \qquad \frac{\partial \sum}{\partial \bar{c}_\nu}=0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n). \tag{49}$$

因为

$$\frac{\partial \sum}{\partial c_\nu}=\sum_{j=0}^{m}[\overline{P(z_j)}-\overline{w_j}]z_j^\nu, \qquad \frac{\partial \sum}{\partial \bar{c}_\nu}=\sum_{j=0}^{m}[P(z_j)-w_j]\bar{z}_j^\nu,$$

所以(49)有下面的形状

$$\sum_{j=0}^{m}\overline{P(z_j)}\,z_j^\nu=\sum_{j=0}^{m}\overline{w}_j z_j^\nu, \qquad \sum_{j=0}^{m}P(z_j)\bar{z}_j^\nu=\sum_{j=0}^{m}w_j\bar{z}_j^\nu \qquad (\nu=0,1,\cdots,n). \tag{50}$$

方程(50)按下面的意义共軛：即其中的一个可由另一个改变虚数单位前的符号推出，也就是其中任一个是另一个的推論．所以只要对于 c_ν 来解方程組

$$\sum_{j=0}^{m}P(z_j)\bar{z}_j^\nu=\sum_{j=0}^{m}w_j\,\bar{z}_j^\nu \qquad (\nu=0,1,\cdots,n), \tag{51}$$

或者令

$$h_{pq}=\sum_{j=0}^{m}z_j^p\overline{z_j^q} \qquad (p,q=0,1,\cdots,n), \qquad k_\nu=\sum_{j=0}^{m}w_j\overline{z_j^\nu} \qquad (\nu=0,1,\cdots,n),$$

来解方程組：

$$\sum_{p=0}^{n}h_{pq}c_p=k_q \qquad (q=0,1,\cdots,n). \tag{52}$$

必須查明，方程組的行列式

$$H_{n+1}=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0n} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n0} & h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

是否为零．我們要証实

$$H_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\sum|W(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)|^2, \tag{53}$$

其中 W 表示房德莽行列式，而在求和时 ζ_j 中的每个数都要取到一切值 $z_0, z_1, \cdots, z_m$。像在第 29 节中一样，这是可以証明的，只要我們写出

$$|W(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)|^2=W(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)W(\overline{\zeta}_0,\overline{\zeta}_1,\cdots,\overline{\zeta}_n)=$$
$$=W(\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\sum_P[\nu_0\nu_1\cdots\nu_n]\overline{\zeta}_{\nu_1}\overline{\zeta}_{\nu_2}^2\cdots\overline{\zeta}_{\nu_n}^n.$$

因为在数 $z_j(j=0,1,\cdots,m)$ 中沒有同样的，并且因为 $m\leqslant n$，所以在公式 (53) 右端的各个行列式中至少有一个不为零，因而有 $H_{n+1}>0$。

从等式(52)与(47)消去 c_ν，我們得到：

$$P_n(z)=-\begin{vmatrix}0 & 1 & z & \cdots & z^n\\ k_0 & h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0n}\\ k_1 & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1n}\\ k_n & h_{n0} & h_{n1} & \cdots & h_{nn}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0n}\\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{n0} & h_{n1} & \cdots & h_{nn}\end{vmatrix}. \tag{54}$$

如果数 w_j 是某个复变函数 $w=f(z)$ 在点 z_i 处的值，那么和数 (46) 具有以下形状

$$\Sigma=\sum_{j=0}^{m}|P(z_j)-f(z_j)|^2. \tag{55}$$

作为这个和的自然的推广，我們可以引进积分来代替它。設函数 $f(z)$ 是在某一区域(D)中給定的，此外并設某一不取負值的实函数(微分权) $p(x,y)$ 在这区域的每个点 $z=x+iy$ 处是确定的。可以提出关于寻找已知次数的一个多項式 $P(z)$，使得展布在区域(D)上的二重积分

$$I=\iint_{(D)}|P(z)-f(z)|^2p(x,y)\,dx\,dy \tag{56}$$

成为最小的問題。

因为可以設想“权” $p(x,y)$ 不仅是沿全区域(D)分布的，而且也集中在某些曲綫上或某些点上，所以引用斯提叶斯积分来代替普通的积分是适当的，这时用积分权 $\psi(\sigma)$ 来代替微分权 $p(x,y)$。积分权 $\psi(\sigma)$ 是任意区域 (σ) 的一个不取負值的函数，(σ)是区域(D)的部分，除此以外，$\psi(\sigma)$ 还具备可加性：

$$\psi(\sigma'+\sigma'')=\psi(\sigma')+\psi(\sigma''),$$

只要区域(σ')与(σ'')都属于(D)并且沒有公共的点。函数 $\psi(\sigma)$ 可照常例正規化，使得

$$\psi(D)=1.$$

使得成为最小值的那个积分具有如下的形状：

$$I=\int_{(D)}|P(z)-f(z)|^2 d\psi(\sigma)^{1)}, \tag{57}$$

或者

$$I=\int_{(D)}[P(z)-f(z)][\overline{P(z)}-\overline{f(z)}]d\psi(\sigma). \tag{58}$$

像在前面的問題中一样，我們得到方程組

$$\frac{\partial I}{\partial c_\nu}\equiv\int_{(D)}[P(z)-f(z)]\bar{z}^\nu d\psi(\sigma)=0,$$

也就是

$$\int_{(D)}P(z)\bar{z}^\nu\, d\psi(\sigma)=\int_{(D)}f(z)\bar{z}^\nu d\psi(\sigma) \qquad (\nu=0,1,\cdots,n).$$

这个方程組在記号

$$h_{pq}=\int_{(D)}z^p\bar{z}^q\, d\psi(\sigma) \qquad (p,q=0,1,\cdots,n), \tag{59}$$

$$k_\nu=\int_{(D)}f(z)\bar{z}^\nu d\psi(\sigma) \qquad (\nu=0,1,\cdots,n) \tag{60}$$

之下还可化为下列形状：

$$\sum_{p=0}^{n}h_{pq}c_p=k_q \qquad (q=0,1,\cdots,n).$$

行列式

$$H_{n+1}=\begin{vmatrix} h_{00} & \cdots & h_{0n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{n0} & \cdots & h_{nn}\end{vmatrix}$$

滿足等式

$$H_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_{(D)}\int_{(D)}\cdots\int_{(D)}|W(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)|^2 d\psi(\sigma_1)d\psi(\sigma_2)\cdots d\psi(\sigma_n) \tag{61}$$

因而不等于零。由此可見，給出問題的解答的多項式 $P(z)$ 存在；这个多項式是唯一的，并且具有(54)的形状，所不同的是 h_{pq} 与 k_ν 現在具有由公式(59)与(60)所表明的值。

假若我們要推广前面的問題，要把积分(57)变为最小，可是把 $P(z)$ 理解为"广义"多項式

$$P(z)=a_1\varphi_1(z)+a_2\varphi_2(z)+\cdots+a_n\varphi_n(z),$$

其中 $\varphi_\nu(z)$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ 是在 (D) 中正則的函数，并且成一綫性無关的函数系，那末

1) 我們虽然只写出一个积分号，但在这里积分是二重的。

我們就会重新得到公式(54)，其中 h_{pq} 与 k_ν 的値由等式

$$h_{pq}=\int_{(D)}\varphi_p(z)\overline{\varphi_q(z)}d\psi(\sigma), \tag{62}$$

$$k_\nu=\int_{(D)}f(z)\overline{\varphi_\nu(z)}d\psi(\sigma) \tag{63}$$

給出，而对应于方程組的行列式 H_{n+1} 由于有下面的关系

$$H_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_{(D)}\int_{(D)}\cdots\int_{(D)}|D(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)|^2d\psi(\sigma_1)d\psi(\sigma_2)\cdots d\psi(\sigma_n)$$

而不为零，并且 $D(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ 具有第 19 节[公式(115)]中同样的值。

像在实数域中一样，逼近的問題可以特別簡化，如果 $\varphi_\nu(z)$ 在区域 (D) 中构成关于权 $\psi(\sigma)$ 的**正交**系，也就是只要等式

$$h_{pq}=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q\\ 1, & \text{当 } p=q\end{cases}\qquad (p,q=0,1,\cdots,n) \tag{64}$$

成立，这就是說，在这情况下，多項式 $P(z)$ 具有下面的形状：

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{n}k_\nu\varphi_\nu(z),$$

其中 k_ν 由等式(63)确定。

如果函数系 $\varphi_m(z)\,(m=1,2,\cdots)$ 不是正交系，那么引进新函数

$$\Phi_m(z)\qquad (m=1,2,\cdots)$$

可以把它**正交化**，函数 $\Phi_m(z)$ 是由下面的公式定义的：

$$\Phi_m(z)=\frac{1}{+\sqrt{H_mH_{m-1}}}\begin{vmatrix}h_{11} & h_{21} & \cdots h_{n1}\\ h_{12} & h_{22} & \cdots h_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{1n-1} & h_{2n-1} & \cdots h_{nn-1}\\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \cdots\varphi_n(z)\end{vmatrix},$$

$$H_m=\begin{vmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots h_{1m}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots h_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots h_{mm}\end{vmatrix}\qquad (m=1,2,\cdots,n).$$

事实上，当 $m<n$ 时，显然

$$\int_{(D)}\begin{vmatrix}h_{11} & h_{21} & \cdots h_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{1n-1} & h_{2n-1} & \cdots h_{nn-1}\\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \cdots\varphi_n(z)\end{vmatrix}\overline{\varphi_m(z)}d\psi(\sigma)=0,$$

即

$$\int_{(D)} \Phi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}d\psi(\sigma)=0,$$

由此可見

$$\int_{(D)} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}d\psi(\sigma)=0, \qquad \int_{(D)} \overline{\Phi_n(z)}\Phi_m(z)d\psi(\sigma)=0.$$

另一方面，用 $H_{ij}^{(n)}$ 表示行列式 H_n 中元 h_{ij} 的代数余子式，并注意 $\overline{h}_{ij}=h_{ji}$ 与 $\overline{H}_{ij}^{(n)}=H_{ji}^{(n)}$，我們得到：

$$\int_{(D)} \begin{vmatrix} h_{11} & h_{21} & \cdots h_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ h_{1\,n-1} & h_{2\,n-1} & \cdots h_{n\,n-1} \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \cdots \varphi_n(z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{h}_{11} & \overline{h}_{21} & \cdots \overline{h}_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \overline{h}_{1\,n-1} & \overline{h}_{2\,n-1} & \cdots \overline{h}_{n\,n-1} \\ \overline{\varphi_1(z)} & \overline{\varphi_2(z)} & \cdots \overline{\varphi_n(z)} \end{vmatrix} d\psi(\sigma)=$$

$$=\int_{(D)} \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(z)H_{ni}^{(n)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi_j(z)}H_{jn}^{(n)}d\psi(\sigma)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}H_{ni}^{(n)}H_{nj}^{(n)}h_{ij}=H_{nn}^{(n)}H_n=H_{n-1}H_n,$$

因而

$$\int_{(D)} \Phi_n(z)\overline{\Phi_n(z)}d\psi(\sigma)=1.$$

由此推出函数 $f(z)$ 在区域 (D) 中对于权 $\psi(\sigma)$ 的逼近法如下。首先作出次数相继增加的正交多項式系

$$\Phi_n(z) \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

它們具备如下的性質：

$$\int_{(D)} \Phi_i(z)\overline{\Phi_k(z)}d\psi(\sigma)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases} \qquad (i,k=0,1,\cdots),$$

然后作出已給函数 $f(z)$ 的平方逼近的 n 次多項式 $P_n(z)$，它可取作展开式

$$f(z)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\Phi_\nu(z) \tag{65}$$

中前面 $n+1$ 項的和，其中

$$k_\nu=\int_{(D)} f(z)\overline{\Phi_\nu(z)}d\psi(\sigma);$$

就是說，

$$P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}k_\nu\Phi_\nu(z). \tag{66}$$

多項式 $\Phi_n(z)$可表成显示式如下：

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{+\sqrt{H_{n+1}H_n}}\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \cdots h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \cdots h_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{0\ n-1} & h_{1\ n-1} & \cdots h_{n\ n-1} \\ 1 & z & \cdots z^n \end{vmatrix}, \tag{67}$$

$$H_{m+1}=\begin{vmatrix} h_{00} & \cdots h_{m0} \\ \cdots & \cdots \\ h_{0m} & \cdots h_{mm} \end{vmatrix} \qquad (m=0,1,\cdots),$$

并且量 h_{pq} 由公式(59)决定。

多項式 $\Phi_n(z)$在区域(D)中关于权 $\psi(\sigma)$因为是正規的，并且具有正的最高次項系数，它与使积分

$$\int_{(D)}|P(z)|^2d\psi(\sigma)$$

成为最小值的多項式

$$P(z)=z^n+\cdots$$

只不过相差一常数因子。

近似等式

$$f(z)\approx\sum_{\nu=0}^{n}k_\nu\Phi_\nu(z)$$

的平方誤差由公式

$$\mu_n=\int_{(D)}|f(z)|^2d\psi(\sigma)-\sum_{\nu=0}^{n}|k_\nu|^2$$

給出。如果函数$f(z)$在区域(D)中(包括它的边界在内)正則，那么像在实数域中的情形一样，根据第 62 节中定理 1 可以断言[1)]，单調不增数列 μ_n 当 n 無限增大时趋近于零：

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n=0。$$

于是巴塞伐等式成立：

$$\int_{(D)}|f(z)|^2d\psi(\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\int_{(D)}f(z)\overline{\Phi_\nu(z)}d\psi(\sigma)\right|^2. \tag{68}$$

至于遞推关系式，那么一般說来它不能被推广到复数域的情形。我們建議讀者

1) 区域(D)假設为有限的。

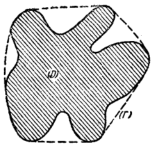


圖 36

重演一下在第 32 节中所介紹的对于实数域的遞推关系式的推演，并說明不能作出推广来的困难是什么。

虽然如此，但是与第 32 节中就实数域情形証明了的情形类似，不难發現多項式 $\Phi_n(z)$ 的零点的一个性質：多項式 $\Phi_n(z)$ 的全部零点落在包含区域 (D) 的最小凸形区域內。

这时所謂包含区域 (D) 的最小凸形区域是指由下述这种点組成的点集合，不論它們屬于区域 (D) 与否，但具有这样的性質，即从它們去看区域 (D) 时，所張的角度不小于 π (圖36)。

事实上，設 ζ 是多項式 $\Phi_n(z)$ 的零点．于是 $\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}$ 是 $n-1$ 次多項式，因而等式

$$\int_{(D)}\Phi_n(z)\cdot\overline{\left(\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right)}d\psi(\sigma)=0$$

必須成立，或者写成另外一种样子，

$$\int_{(D)}(z-\zeta)\cdot\left|\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right|^2 d\psi(\sigma)=0.$$

但由此推得：

$$\zeta=\int_{(D)}z\left|\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right|^2 d\psi(\sigma):\int_{(D)}\left|\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right|^2 d\psi(\sigma).$$

最后这公式說明了，ζ 是圖形 (D) 的重心，如果用关系式

$$\Psi(\sigma)=\int_{(\sigma)}\left|\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right|^2 d\psi(\sigma)$$

来取作它的密度的話，其中 $\left|\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\right|^2\geqslant 0$；这样就証明了所作的断言。

回到复数区域中特殊的正交多項式系，我們特别注意其中如下的两类。

I．权是沿(有限的)区域 (D) 均匀分布的，并且由公式

$$\psi(\sigma)=\iint_{(\sigma)}dxdy$$

所确定，即 $\psi(\sigma)$ 等于 (σ) 的面积．对于这种权所作出的多項式 $\Phi_n(z)$ 叫做加列曼多項式[1]；它們滿足正交性的条件：

$$\iint_{(D)}\Phi_i(z)\overline{\Phi_k(z)}\,dxdy=\begin{cases}0, & 当\ i\neq k\\ 1, & 当\ i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,2,\cdots).\qquad (69)$$

II．区域 (D) 是由簡单可求长曲綫 (C) 圍成的，并假定权是沿这曲綫均匀分布的．

1) T. Carleman[1]．几乎与 T. 加列曼同时，S. 波赫納曾經研究过这些多項式(参考 S Bochner[1])．

对于这种权所作出的多项式 $\Phi_n(z)$ 叫做齐各多项式[1]；它們滿足条件：

$$\int_{(C)}\Phi_i(z)\overline{\Phi_k(z)}ds=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq k\\ 1, & \text{当 } i=k\end{cases}\qquad (i,k=0,1,2,\cdots),\tag{70}$$

其中 ds 表示曲綫 (C) 的弧元素。

例 1. 試按最小二乘法作一次多項式 $P_1(z)$ 使与下面給定的数据相符：

$$\begin{array}{llllllllll} z= & -1+i, & i, & 1+i, & -1, & 0, & 1, & -1-i, & -i, & 1-i;\\ w= & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0.\end{array}$$

显然，

$$h_{00}=\sum 1=9,\qquad h_{01}=\sum \bar z=0,\qquad h_{10}=\sum z=0,\qquad h_{11}=\sum z\bar z=12,$$

$$k_0=\sum w=4,\qquad k_1=\sum w\bar z=0,$$

所以

$$P_1(z)=-\begin{vmatrix}0&1&z\\4&9&0\\0&0&12\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}9&0\\0&12\end{vmatrix}=\frac{4}{9}.$$

例 2. 設区域 (D) 是圓 $|z|\leqslant 1$，試計算齐各多項式。我們有[設 (C) 是所給的圓的边界]：

$$h_{pq}=\int_{(C)}z^p\bar z^q ds=\int_0^{2\pi}e^{i(p-q)\theta}d\theta=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q,\\ 2\pi, & \text{当 } p=q,\end{cases}$$

因而由公式(67)得：

$$H_n=(2\pi)^n,$$

$$\Phi_n(z)=\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

由此推出平方逼近展开式

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}k_n z^n,\tag{71}$$

其中

$$k_n=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}f(z)\bar z^n ds.$$

但函数 $f(z)$ 假定在圓 (C) 中是正則的，因而也在它里面可展开成泰乐級数：

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m,\qquad c_m=\frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

由此可見，

$$k_n=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m\cdot\bar z^n ds=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}c_m h_{mn}=c_n.$$

---

1) G. Szegö [2].

于是平方逼近展开式(71)与在点 $z=0$ 近邻的泰乐展开式相同.

至于巴塞伐公式,则它有下面的形状:

$$\int_{(C)} |f(z)|^2 ds = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

例 3. 試就圆 $|z|\leqslant 1$ 来計算加列曼多項式.

在这情况下

$$h_{pq} = \iint_{(D)} z^p \bar{z}^q \, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{p+q} e^{i(p-q)\theta} \cdot r dr d\theta = \begin{cases} 0, & \text{当 } p \neq q, \\ \dfrac{\pi}{n+1}, & \text{当 } p=q=n, \end{cases}$$

$$H_n = \frac{\pi^n}{n!},$$

因而

$$\Phi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot z^n \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

像在前例中一样,展开式(65)有下列形状:

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

其中右端是泰乐展开式.

巴塞伐公式是这样的:

$$\iint_{(D)} |f(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}.$$

例 4. 設(D)是正方形

$$-1 \leqslant x \leqslant +1, \qquad -1 \leqslant y \leqslant +1,$$

試計算齐各多項式.

数 h_{pq} 由等式

$$h_{pq} = \int_{(C)} z^p \bar{z}^q ds$$

給出,并且应該沿正方形的边界积分(圖 37). 拆开来,我們得到:

$$\begin{aligned} h_{pq} &= \int_{-1}^{+1} (x+i)^p (x-i)^q dx + \int_{-1}^{+1} (x-i)^p (x+i)^q dx + \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} (1+iy)^p (1-iy)^q dy + \int_{-1}^{+1} (-1+iy)^p (-1-iy)^q dy = \\ &= 2(1+i)^{p-q} \Re \int_{-1}^{+1} (x+i)^p (x-i)^q dx, \end{aligned}$$

由此可見:

$$h_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{当 } p-q \neq 4k, \\ 8\int_0^1 (x^2+1)^q \Re[(x+i)^{p-q}] dx, & \text{当 } p-q=4k \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots).$$

特别，令 $h_{pq}=8h'_{pq}$，我們得到关于数 h'_{pq} 的表：

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \cdots \\
0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \frac{28}{15} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{96}{35} & 0 & \cdots \\
-\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1328}{315} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

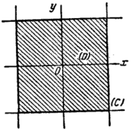


圖 37

所以

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\sqrt{2}},\qquad \Phi_1(z)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot z,\qquad \Phi_2(z)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{14}}\cdot z^2,$$

$$\Phi_3(z)=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{35}{3}}\cdot z^3,\qquad \Phi_4(z)=\frac{15}{64}\sqrt{\frac{7}{11}}\left(z^4+\frac{4}{5}\right),$$

等等．

例 5. 試就同一个正方形来計算加列曼多項式．

这时

$$h_{pq}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}z^p\bar{z}^q dx\,dy=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(x+iy)^p(x-iy)^q dx\,dy,$$

或者

$$h_{pq}=\begin{cases} 0, & \text{当 } p-q\neq 4k, \\ 4\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2)^q\,\Re[(x+iy)^{p-q}]\,dx\,dy, & \text{当 } p-q=4k \end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots).$$

特别，令 $h_{pq}=4h'_{pq}$，我們得到关于数 h'_{pq} 的表：

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \cdots \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \frac{28}{45} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{24}{35} & 0 & \cdots \\
-\frac{4}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1328}{1575} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

所以

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2},\qquad \Phi_1(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}z,\qquad \Phi_2(z)=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}z^2,$$
$$\Phi_3(z)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{6}}z^3,\qquad \Phi_4(z)=\frac{5}{16}\sqrt{\frac{63}{19}}\left(z^4+\frac{4}{15}\right),$$

等等.

在計算巳知单連通区域变成圓域的保角映射时，加列曼多項式与齐各多項式的实际应用值得注意．映射函数可以很簡单地用所說的多項式来表达，如果注意到在复数平面中所取的某些实积分被这个函数化为最小[1].

对于复变数 z 的周期函数 $f(z)$ 也可得到类似的結果。設这样的一个函数在某一周期性的区域 (Δ) 内(圖 25, 第 270 頁)是正則的，幷設 $\psi(\sigma)$ 是 (Δ) 的子区域上的可加及非負函数，我們算作 $\psi(\sigma)$ 是积分权。令

$$T_n(z)=\sum_{m=-n}^{+n}c_me^{imz},$$

于是使积分

$$I=\int_{(\Delta)}|f(z)-T_n(z)|^2d\psi(\sigma)\tag{72}$$

变成極小的問題化为求作在区域 (Δ) 内关于权 $\psi(\sigma)$ 的正交多項式系：

$$\int_{(\Delta)}\Phi_i(z)\overline{\Phi_j(z)}\,d\psi(\sigma)=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j,\\ 1, & 当\ i=j.\end{cases}$$

須从綫性無关的函数系

$$\varphi_0(z)=1,\qquad \varphi_1(z)=e^{iz},\qquad \varphi_2(z)=e^{-iz},\qquad \varphi_3(z)=e^{2iz},\qquad \varphi_4(z)=e^{-2iz}$$

等等出發，幷且要求在多項式 $\Phi_{2n-1}(z)$ 中最高次項 e^{niz} 的系数为正，而含 e^{-niz} 一項不出現；又在多項式 $\Phi_{2n}(z)$ 中，含 e^{-niz} 一項的系数为正．如果这种要求不被滿足，則 $\Phi_{2k-1}(z)$ 与 $\Phi_{2k}(z)$ 应該用第三章中具有形狀 (133) 的多項式 $\Phi^*_{2k-1}(z)$ 与 $\Phi^*_{2k}(z)$ 来代替，其中 λ_k 是任意的复数。

然后得到形式的展开式

$$f(z)\sim A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_{2n-1}\Phi_{2n-1}(z)+A_{2n}\Phi_{2n}(z)],\tag{73}$$

其中

$$A_n=\int_{(\Delta)}f(z)\overline{\Phi_n(z)}\,d\psi(\sigma),$$

幷且平方逼近由(73)右端的有限和产生．巴塞伐公式具有如下的形狀

$$\int_{(\Delta)}|f(z)|^2d\psi(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{(\Delta)}f(z)\overline{\Phi_n(z)}\,d\psi(\sigma)\right|^2.$$

1) 关于这問題的一些詳細情形可以从下書中得到：Л. В. Канторович и В. И. Крылов "Методы приближенного решения уравнений в частных производных", гл. V, ОНТИ, 1936.

展开式(73)的平方收敛性由第 62 节中定理 2 可推得.

例 6. 区域(Δ)是夹在两条直綫之間的带形

$$-\eta\leqslant y\leqslant+\eta \qquad (\eta>0),$$

权是在这带形上均匀分布的. 应該变成極小的积分具有如下的形状

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}|f(z)-T_n(z)|^2\,dxdy.$$

对应的正交系由下面的函数构成:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}}, \qquad \Phi_{2n-1}(z)=\frac{e^{inz}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{\operatorname{sh}2n\eta}}, \qquad \Phi_{2n}(z)=\frac{e^{-inz}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{\operatorname{sh}2n\eta}}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

由此推出平方逼近展开式:

$$f(z)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}k_ne^{inz}, \tag{74}$$

其中

$$k_n=\frac{n}{2\pi\operatorname{sh}2n\eta}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}f(z)e^{-in\bar{z}}dxdy. \tag{75}$$

可是函数 $f(z)$ 在(Δ)中是周期的并且是正則的; 因而它可展开成傅立叶級数:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_me^{imz}, \qquad c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)e^{-imx}dx;$$

代入(75)中, 得到等式 $k_n=c_n$, 这就是說公式(74)的右端是傅立叶級数.

例 7. 区域(Δ)是同一个带形 $-\eta\leqslant y\leqslant+\eta\ (\eta>0)$, 可是权集中在它的边界直綫 $y=\pm\eta$ 上并且是均匀地分布着的.

积分 I 具有如下的形状:

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}\{|f(x+i\eta)-T_n(x+i\eta)|^2+|f(x-i\eta)-T_n(x-i\eta)|^2\}dx.$$

其次我們得到:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \qquad \Phi_{2n-1}(z)=\frac{e^{inz}}{2\sqrt{\pi\operatorname{ch}2n\eta}}, \qquad \Phi_{2n}(z)=\frac{e^{-inz}}{2\sqrt{\pi\operatorname{ch}2n\eta}}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

平方逼近展开式

$$f(z)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}k_ne^{inz},$$

其中

$$k_n=\frac{1}{2\pi\operatorname{ch}2n\eta}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x+i\eta)e^{-in(x-i\eta)}+f(x-i\eta)e^{-in(x+i\eta)}]dx,$$

这时也与傅立叶展开式相同.

64. 在复数区域中平方逼近的收敛性 在复数区域中已知函数用平方逼近法求出的多項式的收敛性問題，在一定的意义下比在实数域中相当的問題更容易解决. 这是由于函数的解析性質所致.

我們在这里只講到傅立叶級数以及按齐各多項式或加列曼多項式的展开式.

如果具有周期 2π 的函数 $f(z)$ 在带形

$$\alpha<\Im(z)<\beta$$

中是正則的，那么傅立叶級数

$$f(z)\sim c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inz}+c_{-n}e^{-inz})$$

在这带形中是收斂的，并且在任何內带形

$$\alpha+\delta<\Im(z)<\beta-\delta \qquad (\delta>0) \tag{76}$$

中是一致收斂的.

事实上，只要作代换 $e^{iz}=Z$. 函数

$$F(Z)\equiv f\left(\frac{1}{i}\lg Z\right)$$

在圓环 $e^{-\beta}<|Z|<e^{-\alpha}$ 內是单値且正則的，因而在这圓环內可以展开成罗朗級数

$$F(Z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_nZ^n+c_{-n}Z^{-n}),$$

并且收斂性在任何內圓环

$$e^{-\beta+\delta}<|Z|<e^{-\alpha-\delta} \qquad (\delta>0)$$

中是一致的. 由此推得我們的断言.

特别，如果具有周期 2π 的实函数 $f(x)$ 在实軸上是正則的，那么由傅立叶級数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\left[\text{其中}\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin nt\,dt\right]$$

的有限和所給出的平方逼近，不仅在整个实軸上一致趋向于函数 $f(z)$，而且在包圍实軸的某一带形內也一致趋向于 $f(z)$.

回到按齐各多項式或加列曼多項式所展开的式子的收斂性問題上，我們預先要指出解析函数所滿足的一些不等式.

假定复变数 z 的函数 $F(z)$ 在簡单閉曲綫 (Γ) 所包圍的区域 (D) 內以及在边界 (Γ)

本身上是正則的．設z位于(Γ)的內部或(Γ)上；設(C)是某一条包圍着(Γ)的曲綫，在(C)的內部和(C)上，$F(z)$仍然是正則的，幷設δ表示曲綫(Γ)与(C)之間的距离(圖 38)．于是由哥西积分

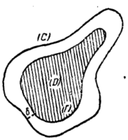


圖 38

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

推出不等式

$$|F(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta-z|}ds\leqslant\frac{1}{2\pi\delta}\int_{(C)}|F(\zeta)|ds, \quad (77)$$

其中ds是曲綫(C)的弧元素．但是因为[用L表示曲綫(C)的长]

$$\int_{(C)}|F(\zeta)|ds\leqslant\sqrt{L\int_{(C)}|F(\zeta)|^2\,ds}\,^{1)},$$

所以不等式(77)又給出：

$$|F(z)|\leqslant\frac{\sqrt{L}}{2\pi\delta}\sqrt{\int_{(C)}|F(\zeta)|^2ds}. \tag{78}$$

特別，如果取以z为中心与ρ为半徑的圓(γ)来替代(D)，那么由不等式(78)得：

$$|F(z)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(\zeta)|^2d\theta}\qquad(\zeta=z+\rho e^{i\theta}).$$

平方起来，再乘以ρ，幷对ρ从0到δ来积分，我們得到：

$$\frac{1}{2}\delta^2|F(z)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}|F(\zeta)|^2\rho\,d\rho\,d\theta,$$

或者

$$|F(z)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{(\gamma)}|F(\zeta)|^2\,dx\,dy},$$

其中二重积分是展布在圓(γ)上的．如果我們設z位于区域(D)內，那么不等式的右端当积分展布在整个区域(D)上时显然只能增大，这是因为圓(γ)整个地落在(D)內的緣故．于是

$$|F(z)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{(D)}|F(\zeta)|^2\,dx\,dy}. \tag{79}$$

作出了不等式(78)与(79)后，我們轉到着重討論的問題上．这时我們只討論齐各与加列曼型的展开式的一些特别情形，讓讀者去辨明它們可能推广到什么程度．

用$f_n(z)$表示在两种情况下的n次逼近多項式，我們把不等式(78)与(79)应用到

1) 这可从布尼亚可夫斯基不等式推得．

函数

$$F(z) \equiv f_n(z) - f(z)$$

上，于是得到：在第一种情况下，

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{\sqrt{L}}{2\pi\delta} \sqrt{\int_{(C)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|^2 ds}\,; \tag{80}$$

而在第二种情况下，

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{(D)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|^2 \,dx\,dy}\,. \tag{81}$$

在不等式(80)与(81)的右端我們恰好看到这样的积分，在所有的n次多项式中，$f_n(z)$使这积分取極小值。現在引証第62节中对于复数区域的定理1，我們知道，对于某些多項式$P_n(z)$，差数模$|P_n(z) - f(z)|$的上界可以使之任意小；于是积分

$$\int_{(C)} |P_n(\zeta) - f(\zeta)|^2 ds \qquad 与 \qquad \iint_{(D)} |P_n(\zeta) - f(\zeta)|^2 dx\,dy$$

也可以使之任意小，因而在不等式(80)与(81)右端的积分也更加可以使之任意小。于是最后推得，当n足够大时，不等式

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

对于区域(D)中一切的z一致地成立。

由此可見，**如果函数$f(z)$在区域內以及它的边界(C)上是正則的**[1]**，那么$f(z)$的齐各多項式級数的展开式或加列曼多項式級数的展开式，在位于边界(C)內的任何閉区域(D')上一致收斂于函数$f(z)$。**

65. 在复数区域中插补法的一般概要　我們用$U_m[F]$ $(m=0, 1, \cdots, n)$来記一些表达式（泛函数），这些表达式关于函数$F(z)$的数值是綫性的。所謂表达式$U[F]$关于$F(z)$的值是**綫性**的，我們理解为，对于任意两个常数α_1, α_2，下面的等式成立：

$$U[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 U[F_1] + \alpha_2 U[F_2].$$

于是$U[F]$可以了解为形如$\sum_i A_i F(a_i)$的和（A_i与a_i是复数），也可以了解为不同种类的积分記号。写成

$$U[F] = \int F(\zeta) d\psi(\zeta) \tag{82}$$

是恰当的，并且在积分$\int F(\zeta) d\psi(\zeta)$中"質量分布的点"了解为全部的点$a_i$（当$A_i \neq 0$），或点$a^{(i)}$（当$A'^{(i)} \neq 0$），依这里所指是形如$\sum_i A_i f(a_i)$的和或者是形如$\sum_i A^{(i)} F^{(i)}(a^{(i)})$

1) 不难了解，在边界(C)上的正則性可以用在閉区域$(\overline{D}) = (D) + (C)$上的連續性来代替。

的和而定；一般地說，如果这里所指的是在某种意义下的积分，那么所說的点了解为是函数 $\psi(\zeta)$ 在其邻域內不是常数的那种点。

我們同样規定記号：

$$U_m[F]=\int F(\zeta)d\psi_m(\zeta)\qquad (m=0,1,\cdots,n).\tag{83}$$

假定行列式

$$\mathbf{V}_n=\begin{vmatrix} U_0[1] & U_1[1] & \cdots & U_n[1]\\ U_0[z] & U_1[z] & \cdots & U_n[z]\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_0[z^n] & U_1[z^n] & \cdots & U_n[z^n]\end{vmatrix}\tag{84}$$

不为零，我們可以唯一地解决下面的問題。

試求一个 n 次多項式 $\mathbf{P}_n(f,z)\equiv\mathbf{P}_n(z)$ 使符合条件

$$U_m[\mathbf{P}_n]=U_m[f]\qquad (m=0,1,\cdots,n),\tag{85}$$

其中 $f(z)$ 是已知函数，并且写出差数（余项）

$$\mathbf{R}_n(f,z)\equiv f(z)-\mathbf{P}_n(f,z)$$

的表达式。

事实上，令

$$\mathbf{P}_n(f,z)\equiv c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n,$$

我們就得到 $n+1$ 个方程的組

$$c_0U_m[1]+c_1U_m[z]+\cdots+c_nU_m[z^n]=U_m[f]\qquad (m=0,1,\cdots,n),$$

由于 $\mathbf{V}_n\neq 0$，这方程組有唯一的一組解。

設已知函数在某一区域(D)內是正則的，这个区域包含了具有元素 $d\psi_m(\zeta)$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 的所有积分中一切質量分布的点所組成的集 E_n。

于是，所求的多項式 $\mathbf{P}_n(f,z)$ 以及余項 $\mathbf{R}_n(f,z)$ 都能够用哥西积分来表达。

实际上，考慮积分

$$\mathbf{J}_n(f,z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{\int\cdots\int\frac{A_n(z;\zeta_\nu)}{A_n(\zeta;\zeta_\nu)}W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}{\int\cdots\int W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}d\zeta,\tag{86}$$

其中已令

$$A_n(z;\zeta_\nu)\equiv\prod_{\nu=0}^{n}(z-\zeta_\nu);$$

$W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)$ 表示房德蒙行列式

$$W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)=\begin{vmatrix}1 & \zeta_0 & \cdots & \zeta_0^n\\ 1 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \zeta_n & \cdots & \zeta_n^n\end{vmatrix},$$

而(C)是在区域(D)内并且包围着集合E_n的閉綫。

表达式$\mathbf{J}_n(f,z)$具有下面的性質 I 与 II：

I. $$U_m[\mathbf{J}_n(f,z)]=0 \qquad (0\leqslant m\leqslant n).$$

事实上，注意(第 7 节)

$$W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)A_n(z;\zeta_\nu)=W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n,z),$$

我們得到：

$$U_m[\mathbf{J}_n(f,z)]=\int\mathbf{J}_n(f,z)d\psi_m(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f(\zeta)\frac{\int\cdots\int\frac{W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n,z)}{(\zeta-z)A_n(\zeta;\zeta_\nu)}d\psi_m(z)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}{\int\cdots\int W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}d\zeta.$$

分母中的$(n+1)$重积分不为零，因为它不是別的，而是行列式$\mathbf{V}_n$。

可以把分子中的$(n+2)$重积分表成下面的$(n+2)$阶行列式的形狀，就是在行列式$W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n,z)$的每行中各分配以二項型因子与积分符号：

$$\begin{vmatrix}\int\frac{d\psi_m(z)}{\zeta-z} & \int\frac{z\,d\psi_m(z)}{\zeta-z} & \cdots & \int\frac{z^{n+1}d\psi_m(z)}{\zeta-z}\\ \int\frac{d\psi_0(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} & \int\frac{\zeta_0 d\psi_0(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} & \cdots & \int\frac{\zeta_0^{n+1}d\psi_0(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \int\frac{d\psi_n(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n} & \int\frac{\zeta_n d\psi_n(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n} & \cdots & \int\frac{\zeta_n^{n+1}d\psi_n(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n}\end{vmatrix}.$$

可是在这行列式中有两列相同(彼此的区别只在于积分变量z与ζ_m)；这就是說行列式等于零，由此推得需要的結論。

II. 差数$f(z)-\mathbf{J}_n(f,z)$是n次多項式。

这个結論可以这样推得：从哥西公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

减去等式(86)，我們看出差数$f(z)-\mathbf{J}_n(f,z)$等于积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f(\zeta)\frac{\int\cdots\int\frac{A_n(\zeta;\zeta_\nu)-A_n(z;\zeta_\nu)}{\zeta-z}\,\frac{W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)}{A_n(\zeta;\zeta_\nu)}d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}{\int\cdots\int W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)}d\zeta, \quad (86')$$

并且最后这个表达式是关于 z 的 n 次多項式，因为对于分式 $\frac{A_n(\zeta;\zeta_\nu)-A_n(z;\zeta_\nu)}{\zeta-z}$ 这同样是正确的.

由于我們所考慮的問題的解的存在性与唯一性是預先知道的，所以从性質 I 与 II 立即推知积分 $\mathbf{J}_n(f,z)$ 不是别的，正是余項 $\mathbf{R}_n(f,z)$，并且所求的多項式由积分 (86′) 表示.

例 1. 設

$$U_m[F]=F(a_m)\qquad(0\leqslant m\leqslant n),$$

并且假定在点 a_m 中沒有彼此相同的. 我們称这最簡单的熟悉情形为牛頓的(广义)插补法. 于是 $\mathbf{V}_n$ 成为房德蒙行列式 $W(a_0,\cdots,a_n)$. 至于插补多項式，則在按公式(86′)来計算它时，只要对于 ζ_i 积分，把积分下的函数換为它在点 a_i 处的值；因此，經簡化后，我們得到表达式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f(\zeta)\frac{A_n(\zeta)-A_n(z)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{A_n(\zeta)},\qquad A_n(z)\equiv A_n(z;a_\nu),$$

这是以前[第 58 节，公式(7)]已經得到的拉格朗日多項式.

例 2. 下面的断言（是在第 277 頁上所說的断言的某种推广）可以作为上述概要的比較不显明的应用.

設泛函数序列 $\{U_n[f]\}$ 具有这种性質：不論 $\zeta_0,\cdots,\zeta_n$ 是集合 E_n 中怎样的点，对于任何点 z，極限

$$U(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n(z;\zeta_i)|}\geqslant 0\tag{87}$$

存在，并且这極限关系的收斂性对于任何有限区域是一致的.

如果：

1°. 变数 z 屬于某一个在 (C) 内的閉区域 (Δ)；其次，如果在区域 (Δ) 内，不等式 $U(z)\leqslant\alpha$ 成立，而在曲綫 (C) 上不等式 $U(z)\geqslant\beta$ 成立，其中 $\alpha<\beta$，又

2°. 存在着这样一个正的常数 K，使得对于一切 n，不等式

$$\begin{aligned}\int\cdots\int|W_n(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)||d\psi_0(\zeta_0)|\cdots|d\psi_n(\zeta_n)|\leqslant&\\ \leqslant K\left|\int\cdots\int W_n(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)\right|&\end{aligned}\tag{88}$$

成立[1]，那么插补过程对于区域 (Δ) 中一切值 z 一致收斂.

实际上，在条件 $\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$ 之下，下面的余項估計式成立：

$$|\mathbf{R}_n(f,z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}\frac{\int\cdots\int\left|\frac{A_n(z;\zeta_\nu)}{A_n(\zeta;\zeta_\nu)}\right||W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)||d\psi_0(\zeta_0)|\cdots|d\psi_n(\zeta_n)|}{\left|\int\cdots\int W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)\right|}d\zeta\leqslant$$

1) 記号 $\int F(\zeta)|d\psi(\zeta)|$，当 $\int F(\zeta)d\psi(\zeta)=\sum A_iF(a_i)$ 时应了解为和数 $\sum|A_i|F(a_i)$；当 $\int F(\zeta)d\psi(\zeta)=$ $=\int F(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta$ 时应了解为积分 $\int F(\zeta)|\omega(\zeta)||d\zeta|$.

$$\leq K\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}|d\zeta| \to 0.$$

要求 1° 是可以实现的，例如，如果整个点集 E_n 落在某一圆 $|z-a_n|<\rho_n$ 内，并且 $\{a_n\}$ 是滿足第 59 节中条件的牛頓插补基点序列，而数 ρ_n 减小得足够快，使得由条件(87)所定义的函数 $U(z)$ 与第 59 节中由条件(11)所定义的同名的函数無甚区別.

至于要求 2°，則在下面所指出的一个补充的(充分)条件成立时，它也被滿足，只要数 ρ_n 减小得足够快就可以了．事实上，$W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)$ 的主要部分当 $n\to\infty$ 时等于 $W(a_0,\cdots,a_n)\ (\neq 0)$，因而积分

$$\int\cdots\int|W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)|\,|d\psi_0(\zeta_0)|\cdots|d\psi_n(\zeta_n)|$$

与

$$\left|\int\cdots\int W(\zeta_0,\cdots,\zeta_n)\,d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)\right|$$

之比的極限等于积分

$$\int\cdots\int|d\psi_0(\zeta_0)|\cdots|d\psi_n(\zeta_n)| \quad 与 \quad \left|\int\cdots\int d\psi_0(\zeta_0)\cdots d\psi_n(\zeta_n)\right| \tag{89}$$

之比．

我們約定称泛函数 $U[F]$ 是**正**的，如果它具有下形

$$\sum_i A_i F(a_i),$$

其中

$$A_i \geq 0 \qquad \left(\sum_i A_i > 0\right)$$

或者

$$\int F(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta,$$

其中

$$\omega(\zeta)\geq 0 \qquad \left(\int \omega(\zeta)d\zeta > 0\right);$$

在这种情形下，在 E 上由不等式 $F(\zeta)\geq 0$，推得不等式

$$\int F(\zeta)\,|d\psi(\zeta)|>0.$$

設所有一切泛函数 $U_m[F]\ (m\geq 0)$ **是正的**．于是利用归納法容易証实，(89)中两积分彼此相等；因此，具有任何大于 1 的常数 K 的条件 2° 漸近地成立．

以上所說过的結果可以簡短地作一总結：适合第 59 节中当 $n\to\infty$ 时的收斂条件的插补过程

$$P_n(a_m)=f(a_m) \qquad (0\leq m\leq n) \tag{90}$$

允許作某种"改变"：至少在 $U_m[F]$ 是"展布"在点 $a_m\ (m=0,1,2,\cdots)$ 的足够近的邻域的正泛函数时，条件(10)可以用更一般的条件

$$U_m[P_n]=U_m[f] \qquad (0\leq m\leq n)$$

来代替而不致破坏其收斂性．

66. 在复数区域中函数的最好逼近法 假定我們希望在权 $q(x,y)$ 之下，用 n 次多項式 $P(z)$ 一致地并且"最好地"来逼近一个在某一**閉**区域 (D) 中已知的并且**連續的**

复变数 $z=x+iy$ 的函数 $f(z)$，其中 $q(x,y)$ 是在区域(D)中已知的連續正函数；把問題說得明确些，就是我們要使表达式

$$\overline{\Delta}=\max_{(D)} q(x,y)\,|P(z)-f(z)| \tag{91}$$

成为極小．在这里 $P(z)$ 可以是通常的或者是三角的多項式，甚至是推广了的多項式，就是說它具有下列形状

$$P(z)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(z),$$

其中 $\varphi_j(z)\,(j=0,1,\cdots,n)$ 是在区域(D)中一組連續的复变数函数，我們可以假定它們在(D)中是綫性無关的．

在这些很一般的先决条件下，解的存在可用对实数域用过的同样方法(参考第47节)来証明．至于說解是唯一的，在一般情况下，这是不正确的；可是在通常多項式的情形下这是正确的(我們在下面会看到这一点)．

我們注意，如果 $P(z)$ 是广义的多項式，那么可以不引进权的因子 $q(x,y)$ 而算作它是带在函数 $\varphi_j(z)$ 与 $f(z)$ 之內．

首先来建立使某一多項式 $P(z)$ 能成为所考虑的極值問題的解的必要与充分条件．显然，契比謝夫的条件(包含有对"符号变更"的說法)不能直接推广到复数区域．我們要引用在不久以前由柯尔莫哥洛夫[1]所建立的条件及其証明．

設 E 是(D)中的点所成的集，这些点使表达式

$$|P(z)-f(z)|$$

达到極大值，我們用 $L(>0)$ 表示这个極大值．

要多項式 $P(z)$ 使表达式 $\overline{\Delta}$ 成为極小，必須且只須滿足下面的要求：不論所考虑的形如

$$\Pi(z)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(z)$$

的多項式 $\Pi(z)$ 如何，表达式

$$\Re\{\Pi(z)[\overline{P(z)-f(z)}]\} \tag{92}$$

在集合 E 上的最小值不能是正的．

同样，这表达式的最大值不能是負的；这是很明显的，只要用 $[-\Pi(z)]$ 来替代多項式 $\Pi(z)$．同样，表达式

$$\Im\{\Pi(z)[\overline{P(z)-f(z)}]\}$$

1) А. Н. Колмогоров[1].

的最小值不能是正的而最大值不能是負的——这只要用 $-i\Pi(z)$ 或 $+i\Pi(z)$ 来代替 $\Pi(z)$ 就可看出。

我們首先来証明条件的必要性。假設它不成立，于是存在着一多項式 $\Pi(z)$，对于这多項式而言，表达式(92)在集合 E（必然是閉的）上是正的；因此，存在着这样的 $\varepsilon(>0)$，使得对于 E 中所有的值 z，有

$$\Re\{\Pi(z)[\overline{P(z)-f(z)}]\}>\varepsilon;\tag{93}$$

在这种情况下，这同一个关系式(93)也在集合 E_1 上是正确的，E_1 由 (D) 中的点組成，这些点与集合 E 的距离小于某一个正数 δ。显然，(D) 中不屬于 E_1 的点集合是閉的：我們用 G 表示它。偏差 $|P(z)-f(z)|$ 在集合 G 上的最大值 L' 小于它在集合 (D) 上的最大值 L；用 h 表示差数 $L-L'$，于是有：

$$L'=\max_G|P(z)-f(z)|=L-h.$$

又設 H 表示 $|\Pi(z)|$ 在集合 (D) 上的最大值。于是，按照不等式

$$\lambda\leqslant\frac{\varepsilon}{H^2},\qquad \lambda\leqslant\frac{h}{2H}$$

选擇一正数 λ，我們来証实对于多項式

$$Q(z)\equiv P(z)-\lambda\Pi(z),$$

下面的关系式是正确的：

$$\begin{aligned}|Q(z)-f(z)|^2&=[Q(z)-f(z)][\overline{Q(z)-f(z)}]=\\&=\{[P(z)-f(z)]-\lambda\Pi(z)\}\{\overline{[P(z)-f(z)]-\lambda\Pi(z)}\}=\\&=|P(z)-f(z)|^2-2\lambda\Re\{\Pi(z)[\overline{P(z)-f(z)}]\}+\lambda^2|\Pi(z)|^2;\end{aligned}$$

这时如果点 z 屬于 E_1，那么上列最后一表达式不超过

$$L^2-2\lambda\varepsilon+\lambda^2H^2\leqslant L^2-2\lambda\varepsilon+\lambda\frac{\varepsilon}{H^2}\cdot H^2=L^2-\lambda\varepsilon\equiv L_1^2<L^2.$$

另一方面，如果点 z 屬于 G，那么我們直接得到：

$$\begin{aligned}|Q(z)-f(z)|&=|P(z)-f(z)-\lambda\Pi(z)|\leqslant|P(z)-f(z)|+\lambda|\Pi(z)|\leqslant\\&\leqslant(L-h)+\frac{h}{2H}\cdot H=L-\frac{h}{2}\equiv L_2<L.\end{aligned}$$

由此可見，在两种情况下，数 $|Q(z)-f(z)|$ 小于 L_1 与 L_2 两数中的較小者；于是

$$\max_{(D)}|Q(z)-f(z)|<L.$$

因此，与假設相反，多項式 $P(z)$ 不給出最好逼近。

反之，不論多項式 $\Pi(z)$ 如何，如果表达式(92)的最小值是負的或等于零，那么多項式 $P(z)$ 給出最好逼近。事实上，設 $Q(z)$ 是任何一个不同于 $P(z)$ 的多項式；令

$$\Pi(z) \equiv P(z) - Q(z).$$

于是对于某个屬于集合 E 的值 $z=z_0$，我們就会有：

$$\Re\{[P(z)-Q(z)][\overline{P(z)-f(z)}]\} \leqslant 0;$$

由此推得(对于同一个值 z)

$$|Q(z)-f(z)|^2 = |[P(z)-f(z)]-[P(z)-Q(z)]|^2 =$$

$$= |P(z)-f(z)|^2 - 2\Re\{[P(z)-Q(z)][\overline{P(z)-f(z)}]\} + |P(z)-Q(z)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant |P(z)-f(z)|^2 + |P(z)-Q(z)|^2 \geqslant |P(z)-f(z)|^2 = L^2.$$

所以

$$\max_{(D)} |Q(z)-f(z)| \geqslant L,$$

这就是說 $P(z)$ 是給出最小偏差的多項式，因而上面所述的条件是充分的.

現在轉到特殊的情形，就是借以实現逼近的那种多項式系是由通常的 n 次多項式所組成的情形. 我們来証实，在这种假設下，偏差点(就是集合 E 的点)的个数不少于 $n+2$. 事实上，假如这种点的个数不大于 $n+1$，那么可以作出这样的一个 n 次的插补多項式 $L(z)$ (因而它屬于所考慮的函数类)，使得对于 E 的所有点，它滿足关系式

$$L(z) = P(z) - f(z).$$

在这种情况下，我們在柯尔莫哥洛夫的条件中令 $\Pi(z) = L(z)$，就会得到对于集合 E 中任何点都成立的等式

$$\Re\{L(z)[\overline{P(z)-f(z)}]\} = |P(z)-f(z)|^2 = L^2 > 0;$$

就是說，这个表达式的最小值就会是正的，也就是說逼近的必要条件不成立.

其次可以肯定，在通常多項式的情形下只存在着一个最好逼近多項式. 实际上，假如存在有两个这样的多項式，譬如說 $P(z)$ 与 $Q(z)$，它們都有給出的次数 n，那么由不等式

$$|P(z)-f(z)| \leqslant L, \qquad |Q(z)-f(z)| \leqslant L \tag{94}$$

就会推出不等式

$$\left|\frac{P(z)+Q(z)}{2} - f(z)\right| \leqslant L, \tag{95}$$

而最后这关系式中的等式，只有在 (94) 的两个关系式都是等式、并且差数 $P(z)-f(z)$ 与 $Q(z)-f(z)$ 的模与輻角彼此相等的条件下才成立，这就是說 $P(z)$ 应該要等于 $Q(z)$. 可是滿足这种要求的偏差点的个数，如我們所見，不小于 $n+2$；所以 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 不能不恒等.

附注 1. 偏差点所成的集要包含不少于 $n+2$ 个元素这一要求本身，自然不是逼近的充分条件．这只要从下面的例子就可以看出来．假定区域 (D) 是圆 $|z|\leq 1$ 而且 $q(x, y)\equiv 1$；然后設 $f(z)=z^2$，并且求用常数的最好逼近．令 $P(z)=-1$，容易証实在我們的圆中，偏差 $R(z)\equiv z^2+1$ 在 $z=\pm 1$ 两点处达到最大模 2．然而常数 -1 不給出最好逼近，因为令 $P(z)=0$ 时我們就得到偏差 $L=1$．

附注 2. 值得特别注意的是，以上所述在函数 $f(z)$ 是連續的这一唯一的限制下总正确；正則性不是必要的．設 μ_n 是由 n 次多項式产生的最好逼近．我們提醒，$f(z)$ 在区域 (D) 中的正則性是使 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$ 的必要与充分条件．

这可从第 62 节中定理 1 推得．

例． 从所有一切 n 次的并具有形状

$$P(z)=z^n+\sum_{m=0}^{n-1}c_m z^m$$

的多項式 $P(z)$ 中，选出一个多項式，使得在圆 $|z|\leq 1$ 上它与零的偏差要最小．

这里所指的是函数 $f(z)=z^n$ 的用通常的 $n-1$ $(n\geq 1)$ 次多項式的最好逼近．

所求的多項式化为 z^n，这就是說 $P(z)\equiv z^n$．不难檢驗柯尔莫哥洛夫的条件被滿足，它具有下面的形状

$$\min_{|z|\leq 1}\Re\{\Pi_{n-1}(z)\bar{z}^n\}\leq 0.$$

事实上，当 $z=0$ 时左端为零就已足够了．

关于这同一个断言，这里有另一个不依賴于柯尔莫哥洛夫判别法的証明．用 (C) 表示圆 $|z|\leq 1$ 的边界，我們得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}|P(z)|^2 ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{m=0}^{n-1}|c_m|^2+1\geq 1,$$

并且等式只有在 $c_m=0(m=0,1,2,\cdots,n-1)$ 时，亦即在 $P(z)\equiv z^n$ 时，才能达到．另一方面，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}|P(z)|^2 ds\leq[\max_{(D)}|P(z)|]^2,$$

因而

$$\max_{(D)}|P(z)|\geq 1.$$

可是对于 $P(z)\equiv z^n$，我們有：

$$\max_{(D)}|z^n|=1,$$

于是 $P(z)=z^n$ 是所求的多項式．

补　編

在綫性有模空間中的最好逼近法

我們可以把本書中已講过的各种逼近理論写成一般的、更抽象的与更明显的形式．这是为了达到下列目的：1)保証更好地深入到所考慮的問題的本質；2)使得叙述本身簡化；3)产生新的推广，因为除了直接考慮的具体的特別情形("实現")外，一般理論也可应用到另外一些特別情形，而只須这理論的前提在每一特別情形下成立．

我們通常說某一元素的集体(集)成一度量空間 R，只要对应于 R 中每一对元素 a 及 b，有一实数 $\delta(a,b)$，称为 a 与 b 之間的距离；而且我們假定距离 $\delta(a,b)$ 有下列性質：

1°．$\delta(a,b)\geqslant 0$；$\delta(a,b)=0$ 必須而且只須 $a=b$，亦即 a 与 b 重合；

2°．$\delta(a,b)=\delta(b,a)$；

3°．对于任意的 a,b 及 c，$\delta(a,b)\leqslant\delta(a,c)+\delta(c,b)$("三角形性質")．

已給空間 R 中的一元素集 E．如果無論 a 是 R 中哪一元素，数 $\delta(a,x)$ 所成的集(其中 x 取遍 E 中的元素)有界，那么我們說集 E 有界．由三角形性質可推得：集 E 有界的必要与充分条件是至少有一元素 a_0 存在，使得数 $\delta(a_0,x)$ 所成的集(其中 x 屬于 E)有界．事实上，設 a_1 是集 E 中任一与 a_0 不同的元素；于是 $\delta(a_1,x)\leqslant\delta(a_1,a_0)+\delta(a_0,x)$，而且如果不等式的右边第二項有界，那么它的左边也有界．由此証明了条件的充分性；它的必要性是明显的．

元素序列 $\{x_n\}$ 有極限 a (写作 $x_n\to a$)，假若

$$\lim_{n\to\infty}\delta(a,x_n)=0.$$

由数項序列的性質与不等式 1°—3° 可推得：元素序列或者沒有極限，或者只有一極限．我們来証明这一点．反之，設 $x_n\to a$ 并且 $x_n\to a'$，亦即 $\delta(x_n,a)\to 0$ 并且 $\delta(x_n,a')\to 0$．于是 $\delta(a,a')\leqslant\delta(a,x_n)+\delta(x_n,a')\to 0$，由此可見，$\delta(a,a')=0$，亦即 $a=a'$．

由条件 2° 与 3°，距离 $\delta(x,y)$ 是变元素对 (x,y) 的連續函数．首先証明 $\delta(x,y)$ 是一个变元 x 的連續函数．这是由于三角形性質：

$$\delta(x',y)-\delta(x,y)\leqslant\delta(x',x),$$

完全同样，

$$\delta(x,y)-\delta(x',y)\leqslant\delta(x',x),$$

因而

$$|\delta(x',y)-\delta(x,y)|\leqslant\delta(x',x).$$

这样一来，如果 $x'\to x$，那么 $\delta(x',x)\to 0$，从而 $\delta(x',y)\to\delta(x,y)$。对于第二个变元可以作类似的証明。最后，上述断語对于元素对也成立，因为

$$|\delta(x',y')-\delta(x,y)|\leqslant|\delta(x',y')-\delta(x',y)|+|\delta(x',y)-\delta(x,y)|;$$

因此假如上列不等式的右边每一項小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，那么它的左边小于 ε。

已給一集 E。如果从其中每一無旁有界子集可以选出一个收斂亦即有極限的序列，那么我們說集 E 是紧密的[1]。如果一集包含其中元素所作成的一切收斂序列的極限，那么我們說它是閉集。

設 E 是空間 R 中一个元素集，a 是这空間中一元素。距离 $\delta(a,x)$（其中 x 取遍集 E 中的元素）的下界称为元素 a 与集 E 的距离：

$$L\equiv L(a,E)=\inf_{x\in E}\delta(a,x).$$

如果集 E 中一元素 x_0 有这种性質：它与 a 的距离等于 a 与集 E 的距离

$$\delta(a,x_0)=L,$$

那么我們說元素 x_0 給出元素 a 在集 E 上或用集 E 的最好逼近。数量 L 本身称为最好逼近量，或簡称为最好逼近。

現在發生下列問題：

1) 在集 E 中是否有元素 x_0 逼近元素 a？

2) 如果存在着元素 x_0，那么它是否是唯一的？

首先我們研究第一个問題。

由下界的定义，我們可以指出 E 中的一个元素序列 $\{x_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\delta(a,x_n)=L.$$

显然，由序列 $\{x_n\}$ 中的元素所組成的集有界。如果集 E 是紧密的，那么可以从序列 $\{x_n\}$ 中选出一个收斂序列 $\{x_{p_n}\}$；設 $x_{p_n}\to x_0$。此外，如果集 E 是閉的，那么元素 x_0 也屬于集 E。于是根据距离的連續性，由 $x_{p_n}\to x_0$ 可推得 $\delta(a,x_{p_n})\to\delta(a,x_0)$，因而 $\delta(a,x_0)=L$。所以元素 x_0 給出最好逼近。

这样，如果度量空間 R 中的集 E 是紧密的与閉的，那么無論 a 是 R 中哪一元素，在集 E 中总可找到一个元素 x_0，它給出元素 a 的最好逼近。

綫性空間的情形特別有意义。所謂綫性空間就是指在这空間中确定了：1) 加法

1) 我們注意：此处需要在任何有界的無旁子集中，有一收斂序列存在，与通常的紧密集的定义不同。

运算，2) 用純量（实数）的乘法运算；这些运算适合通常代数中的一切法則．用 $a+b$ 表示元素 a 与 b 的和，用 λa 表示純量 λ 与元素 a 的乘积；用 θ 表示空間中的零元素．上面提到的法則是：

$$a+b=b+a, \qquad \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c, \qquad (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

此外，

$$0a=\theta, \qquad \lambda\theta=\theta.$$

同时显然

$$a-a=a+(-1)a=[1+(-1)]a=\theta, \qquad a+\theta=a,$$

等等．

綫性空間中有限个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 組成一系．如果由等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=\theta$$

一定可推得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，那么这个元素系称为**綫性無关的**．如果在空間中有含任意个元素的綫性無关系，那么这空間称为**無穷維**空間；反之，它就是**有限維**空間，而这时可能最多个綫性無关元素的个数，称为空間的**維数**或**維**．

設所考虑的綫性空間有 p 維，并且

$$e_1, e_2, \cdots, e_p$$

是屬于它的一組綫性無关的元素；这时元素系 $x, e_1, e_2, \cdots, e_p$（其中 x 是空間中任一元素）不是綫性無关的，这就是說，在这些元素間有一形如

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_pe_p \tag{$*$}$$

的关系，其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ 是唯一地确定的純量．事实上，由假設，存在着不全等于零的常数 $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_p$ 使得

$$\varkappa x+\varkappa_1e_1+\varkappa_2e_2+\cdots+\varkappa_pe_p=\theta,$$

其中 $\varkappa\neq0$（否則元素系 $e_1, e_2, \cdots, e_p$ 应綫性相关）；因此可以写出

$$x=-\frac{\varkappa_1}{\varkappa}e_1-\frac{\varkappa_2}{\varkappa}e_2-\cdots-\frac{\varkappa_p}{\varkappa}e_p,$$

又令 $-\frac{\varkappa_i}{\varkappa}=\xi_i(i=1,2,\cdots,p)$，我們就得到关系式（$*$）．形如（$*$）的关系式是唯一的，因为假若除了（$*$）以外，还有关系式

$$x=\xi'_1e_1+\xi'_2e_2+\cdots+\xi'_pe_p \tag{$**$}$$

存在，那么由（*）及（**）应有

$$(\xi_1-\xi_1')e_1+(\xi_2-\xi_2')e_2+\cdots+(\xi_p-\xi_p')e_p=\theta,$$

由此并注意到元素系 $e_1,e_2,\cdots,e_p$ 綫性無关，我們就得到

$$\xi_i=\xi_i' \qquad (i=1,2,\cdots,p).$$

这样，p 維綫性空間中的元素是由与它有綫性关系的 p 个純参变量（坐标）的数值所确定。

如果在綫性空間中利用模引进度量，那么这空間称为有模空間：对应于每一元素 a，有一具有下列性質的数（元素 a 的模）：

1°. $\|a\|\geqslant 0$；$\|a\|=0$ 必須而且只須 $a=\theta$；

2°. $\|\lambda a\|=|\lambda|\cdot\|a\|$；

3°. $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$.

在有模綫性空間中，我們根据下列定义引进距离：

$$\delta(a,b)=\|a-b\|.$$

这时 $\delta(a,b)$ 有距离的一切性質，因为这些性質可以从模的性質推出。实际上，

1°. $\delta(a,b)\geqslant 0$，因为 $\|a-b\|\geqslant 0$；$\delta(a,b)=0$ 必須而且只須 $\|a-b\|=0$，亦即 $a-b=\theta$，或 $a=b$.

2°. $\delta(a,b)=\delta(b,a)$，因为 $\|b-a\|=\|(-1)(a-b)\|=|-1|\cdot\|a-b\|=\|a-b\|$.

3°. $\delta(a,b)\leqslant\delta(a,c)+\delta(c,b)$，因为 $\|(a-c)+(c-b)\|\leqslant\|a-c\|+\|c-b\|$，亦即 $\|a-b\|\leqslant\|a-c\|+\|c-b\|$.

如果由关系式

$$\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$$

可推得 $\lambda a=\mu b$，其中 λ 及 μ 是非負的純量 $(\lambda^2+\mu^2>0)$，那么空間 R 称为严格有模的。

我們已經看到，在有限維的有模空間中，任一元素 x 是由有限个参变数 ξ_i 所确定。元素 x 的模是这些参变数的連續函数。事实上，設 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i\ (i=1,2,\cdots,p)$；那么令

$$x^{(n)}=\sum_{i=1}^{p}\xi_i^{(n)}e_i, \qquad x=\sum_{i=1}^{p}\xi_ie_i,$$

由性質 2° 及 3° 可得：

$$\|x^{(n)}-x\|=\left\|\sum_{i=1}^{p}(\xi_i^{(n)}-\xi_i)e_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\cdot\|e_i\|\to 0,$$

因而

$$\|x^{(n)}\|-\|x\|=\|(x^{(n)}-x)+x\|-\|x\|\leqslant\|x^{(n)}-x\|+\|x\|-\|x\|=\|x^{(n)}-x\|;$$

完全同样，

$$\|x\|-\|x^{(n)}\|\leqslant\|x-x^{(n)}\|;$$

于是

$$|\,\|x^{(n)}\|-\|x\|\,|\leqslant\|x^{(n)}-x\|\to 0,$$

$$\|x^{(n)}\|\to\|x\|.$$

由此可見，有限維綫性有模空間一定是紧密的与閉的.

为了証明起見，考虑在参变数 ξ_i 所构成的 p 維空間中适合

$$\max\{|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_p|\}=1$$

的一个閉点集．用 S 表示这个点集．在这集上，参变数 ξ_i 的連續函数 $\|x\|$ 达到它的最小值 δ．这个值 δ 是正数，因为 $\|x\|$ 只有在 $x=\theta$ 时为零．因此如果参变数的最大的絕对值等于 1，那么元素的模大于或等于 δ．設有一有界的元素序列 $\{x^{(n)}\}$；假定 $\|x^{(n)}\|<M(n=1,2,3,\cdots)$．設 $x^{(n)}=\sum\limits_1^p\xi_i^{(n)}e_i$；考虑序列 $\{y^{(n)}\}$，其中

$$y^{(n)}=\frac{x^{(n)}}{\sigma_n},\qquad \sigma_n=\max\{|\xi_1^{(n)}|,|\xi_2^{(n)}|,\cdots,|\xi_p^{(n)}|\}.$$

于是元素 $y^{(n)}$ 屬于集 S，并且根据已証明的結果，$\|y^{(n)}\|\geqslant\delta$，亦即 $\frac{\|x^{(n)}\|}{\sigma_n}\geqslant\delta$，由此可見，$\sigma_n\leqslant\frac{\|x^{(n)}\|}{\delta}<\frac{M}{\delta}$.

而这就表示对于 i 与 n 的一切数值，$|\xi_i^{(n)}|<\frac{M}{\delta}$；因此我們可以选出一个指标序列 $\{m_n\}$，使得 $\xi_i^{(m_n)}\to\xi_i\,(i=1,2,\cdots,p)$，于是 $x^{(m_n)}\to x$，其中 $x=\sum\limits_1^p\xi_ie_i$．这样就証明了我們的空間是紧密的．証明它是閉的比較簡单[1]．实际上，設序列 $\{x^{(m)}\}$ 的元素有極限 x，并且这些元素屬于 p 維綫性有模空間 A．假定 $e_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是 A 中的一組綫性無关的元素，并且 $x^{(n)}=\sum\limits_{i=1}^p\xi_i^{(n)}e_i$．选取指标序列 $\{m_n\}$，使得 $\xi_i^{(m_n)}\to\xi_i\;(i=1,2,\cdots,p)$．于是 $x^{(m_n)}\to\sum\limits_1^p\xi_ie_i$，并且另一方面 $x^{(m_n)}\to x$；这就表明了 $x=\sum\limits_1^p\xi_ie_i$（因为每一收斂序列只有一極限），由此可見，$x$ 屬于 A.

結合以上所得結果，我們可以断定：如果綫性有模空間 R 中一集 A 是一个綫性有限維空間，那么無論 a 是空間 R 中哪一元素，在集 A 中可以找到一个元素 x_0，它給

1) 当然，只有在所考虑的綫性空間是空間 R 的眞子空間时才需要証明．

出元素 a 的最好逼近.

現在来研究第二个問题,亦即最好逼近的唯一性問题;在这里我們指出使唯一性一定成立的下列充分条件,这条件就是:空間 R 是严格有模的.

反之,假定在空間 A 中有两个不同的元素 x_0 与 x_0' 給出 a 的最好逼近,于是

$$\| x_0-a \| =L, \qquad \| x_0'-a \| =L, \qquad L>0, \qquad x_0 \neq x_0'.$$

这时

$$\left\| \frac{x_0+x_0'}{2}-a \right\| = \left\| \frac{x_0-a}{2}+\frac{x_0'-a}{2} \right\| \leqslant \left\| \frac{x_0-a}{2} \right\| + \left\| \frac{x_0'-a}{2} \right\| =L.$$

在这里等式不可能成立,因为根据严格有模性,由此就会推得

$$\lambda(x_0-a)=\lambda'(x_0'-a), \qquad (\lambda, \lambda'>0; \qquad \lambda^2+\lambda'^2\neq 0);$$

由于 $x\neq x_0'$,等式 $\lambda=\lambda'$ 不可能成立;如果 $\lambda\neq\lambda'$,那么

$$a=\frac{\lambda x_0-\lambda' x_0'}{\lambda-\lambda'}, \qquad \left\| \frac{\lambda x_0-\lambda' x_0'}{\lambda-\lambda'}-a \right\| =0.$$

但这个关系式与假定 $L>0$ 相矛盾.

于是

$$\left\| \frac{x_0+x_0'}{2}-a \right\| <L;$$

而这个結果又与 L 是 a 对 A 的最好逼近不相容.

以上所講的都可以改述一下.

已給綫性空間中的一个元素集 A. 假若只要元素 a 与 b 属于 A, 無論 λ 及 μ 是怎样的純量,元素 $\lambda a+\mu b$ 也屬于 A,那么集 A 本身显然也是一个綫性空間.

已給綫性空間 A 中的一个集 M. 如果只要元素 a 及 b 屬于 M,而且 λ 及 μ 是适合关系式 $\lambda+\mu=1$ 的純量, 元素 $\lambda a+\mu b$ 也屬于 M, 那么我們約定把元素集 M 称为綫性集.

任何綫性空間显然是綫性集. 如果所考慮的綫性集含零元素, 而且也只有在这种情形下,逆定理成立.

实际上,如果 a 及 b 是一个含 θ 的綫性集的元素,那么 $2\lambda a+(1-2\lambda)\theta=2\lambda a$ 以及(同样) $2\mu b$ 是这集的元素;而这时 $\frac{1}{2}\cdot 2\lambda a+\frac{1}{2}\cdot 2\mu b$, 亦即 $\lambda a+\mu b$ 也是它的元素. 另一方面,如果綫性集同时是綫性空間, 那么它包含零元素, 因为在任何綫性空間中一定有零元素.

如果 x 取遍屬于 R 的綫性空間 A 中的元素, 并且 a 是 R 中任一元素, 那么 $y=x+a$ 取遍某一綫性集 M 的元素. 例如在条件 $\lambda+\mu=1$ 下,取 M 中两元素 $y_1=x_1+a$

及 $y_2=x_2+a$，可以証明 $\lambda y_1+\mu y_2=\lambda(x_1+a)+\mu(x_2+a)=(\lambda x_1+\mu x_2)+a$ 也是 M 的元素，因为 $\lambda x_1+\mu x_2$ 是 Λ 的元素。反之，如果 y 取遍某一綫性集 M 的一切元素，并且 a 是这集中的一元素，那么 $x=y-a$ 取遍某一綫性空間 Λ 的元素。事实上，取 a 作为 y，由此可見，綫性集 M 包含零元素；因而它是綫性空間。

現在考慮下列問題：找出綫性集 M 中一元素 y_0，使它給出零元素的最好逼近。可以換句話說：找出綫性集中一元素 y_0，使得它"与零相差最小"（它的模为極小）。

先作一个說明可以把这个問題化为以上所已考慮过的問題。关于逼近的存在与唯一性的結果，像这样也可自然而然地得到。

引进所謂单位球（閔可夫斯基的基本体），我們可以对上面所講的作出"几何解釋"。

在綫性有模空間 R 中，一切模不超过 1 的元素 x：

$$\| x \| \leqslant 1$$

所成的集算为单位球 K。我們指出单位球的下列性質，这些性質都可直接从模的性質推出：

1°. 如果元素 a 屬于 K，那么任何元素 λa（其中 $|\lambda|\leqslant 1$）也屬于 K；

2°. K 是一凸体：如果 a 与 b 屬于 K，那么在 $\lambda\geqslant 0, \mu\geqslant 0$，$\lambda+\mu=1$ 时，元素 $\lambda a+\mu b$ 也屬于 K；

3°. 特别，如果 $\lambda, \mu>0$，元素 a 与 b 不相同，而且空間 R 是严格有模的，那么性質 2° 可加强如下：元素 $\lambda a+\mu b$ 不仅屬于 K，而且是 K 的內点，这就是說，所有与 $\lambda a+\mu b$ 充分接近的元素也屬于 K。

我們来証明最后一性質。由不等式 $\| a \| \leqslant 1$，$\| b \| \leqslant 1$ 可推得：

$$\| \lambda a+\mu b \| \leqslant \lambda \| a \| + \mu \| b \| \leqslant \lambda+\mu=1. \qquad (*)$$

首先，設 $\| \lambda a+\mu b \| <1$；这时在条件 $\| c-(\lambda a+\mu b) \| <1-\| \lambda a+\mu b \|$ 下，我們有：

$$\| c \| = \| (\lambda a+\mu b)+[c-(\lambda a+\mu b)] \| \leqslant \| \lambda a+\mu b \| + \| c-(\lambda a+\mu b) \| <1.$$

其次，設 $\| \lambda a+\mu b \| =1$；但是除非假定 $\| a \| =1$，$\| b \| =1$，而且 b 与 a 綫性相关，因而 $b=\sigma a$，这才是可能的。因此必須假設 $\| a \| =1$ 以及 $|\sigma|\cdot\| a \| =1$。由此可見，$\sigma=\pm 1$；但因 a 与 b 不同，所以 $\sigma=-1$，于是 $b=-a$。在这种情形下，令 $\lambda-\mu=\tau$，我們有 $\lambda a+\mu b=\tau a$。注意 $\| \lambda a+\mu b \| =1$，$\| a \| =1$，所以 $|c|=1$，即 $\lambda-\mu=\pm 1$。另一方面，$\lambda+\mu=0$，所以 λ 与 μ 中必至少有一为 0，与假設相反。因此这一情况不可能發生。

除了单位球 $K\equiv K_1$ 以外，我們还引用与它“相似”、并且由下列不等式所确定的球 K_λ：

$$\|x\|\leqslant\lambda \qquad (0<\lambda<\infty).$$

显然，球 K_λ 也有性質 1°—3°.

如果綫性集 M 中元素的模的極小值等于 λ，那么我們說集 M 是关于球 K_λ 的一个支持集．这就是說，第一，集 M 与球 K_λ 至少有一公有元素；第二，無論 $\varepsilon>0$ 是怎样，集 M 与球 $K_{\lambda-\varepsilon}$ 沒有公有元素．

就几何观点說来，我們的問題就是要找出一数 λ，使得已給的綫性集 M 是关于球 K_λ 的支持集．我們已經証明，这个問題有解，而且如果空間 R 是严格有模空間，那么这个解是唯一的；亦即綫性集 M 与球 K_λ 只有一个公有元素．如果空間 R 不是严格有模空間，那么 M 与 K_λ 或者有一公有元素，或者有無旁个公有元素（一定成一凸集），这与綫性集 M 的取法有关．

我們現在来講上述一般理論的具体实現法．

依照綫性有模空間 R 的元素的性質，及“和”、“与純量的乘积”以及“模”的意义，这些具体实現法有不同的外形．

我們所考慮的最好逼近問題对于这种（較初等的）情形完全适用：p 維（甚至無旁維）空間中的点、亦即数組（点的“坐标”）

$$x_1, x_2, \cdots, x_p$$

是所取的元素；“加法”是几何或向量加法，这时有相同号数的坐标分别彼此相加；“与純量的乘法”就是用常数乘所有的坐标；至于元素 x 的模，就是指形如

$$\sqrt[s]{x_1^s+x_2^s+\cdots+x_p^s} \qquad (s>0)$$

或

$$\sqrt[s]{p_1x_1^s+p_2x_2^s+\cdots+p_px_p^s} \qquad (p_i\geqslant 0)$$

的表达式，或者是其他任何滿足模的性質 1°—3° 的表达式．在 $s=2, p_i=1\ (i=1, 2,\cdots,p)$ 时，我們得到通常的欧几里得空間．

但在我們最有兴趣的問題中，在某一固定的范圍 (D) 上所給出的单变数或多变数、实变数或复变数的函数，起着元素的作用．元素的“加法”是函数在通常意义下的加法；“与純量的乘法”是用常数乘函数；最后，模可用不同的方法来确定，根据它的定义，我們得到某一种“函数空間”．当然，空間中的元素集与模的取法有关．

空間的名称因元素的性質与模的选取法而不同．下表中列举了在本書中所遇到的最重要的函数空間．为了更加明确起見，我們只考慮一个自变数 x 的情形，而且还

設上面所提到的范圍(D)化为固定的綫段$-1\leqslant x\leqslant 1$.

字母C所表示的空間，叫做有"契比謝夫"模的空間或**契比謝夫空間**；字母L所表示的空間，叫做有"冪"模的空間或**冪空間**.

在冪空間$L^{(s)}(\psi)$，$L^{(s)}$的情形下，我們把只在測度为零的集上不相等的函数看作相同的；因此在这种情形下的元素其实不是函数，而是函数类．特别，只在測度为零的集上不等于零的函数类起着零元素的作用．冪模的性質1°与2°是明显的；三角形性質3°在$s\geqslant 1$时可用閔可夫斯基不等式表示出来(参看第218頁上的証明).

函数空間		
記号	元素	模
$L^{(s)}(\psi)$ $(s\geqslant 1)$	函数$f(x)$——对于它积分 $\int_{-1}^{+1}\lvert f(x)\rvert^{s}d\psi(x)$ 存在. $\psi(x)$——有有限个逗留点的不減函数(积分权).	$\left\{\int_{-1}^{+1}\lvert f(x)\rvert^{s}d\psi(x)\right\}^{\frac{1}{s}}$
$L^{(s)}(s\geqslant 1)$	函数$f(x)$——对于它积分 $\int_{-1}^{+1}\lvert f(x)\rvert^{s}dx$ 存在.	$\left\{\int_{-1}^{+1}\lvert f(x)\rvert^{s}dx\right\}^{\frac{1}{s}}$
$C^{(p)}$	函数$f(x)$——在綫段$(-1,+1)$上連續. $p(x)$——正函数(权).	$\max\limits_{\lvert x\rvert\leqslant 1}\{p(x)\lvert f(x)\rvert\}$
C	函数$f(x)$——在綫段$(-1,+1)$上連續.	$\max\limits_{\lvert x\rvert\leqslant 1}\lvert f(x)\rvert$

由于两个原因，$s=2$的情形特別重要：第一，因为对应的空間中的度量直接推广了欧几里得度量；第二，因为在这种情形下，極值条件是綫性的．如果$s<1$，那么冪空間在这种意义下有缺点：亦即三角形性質不再成立．虽然如此，对于有限維綫性集，还是一定有最好逼近．这是由于在$s<1$时，模的s次冪仍然滿足三角形条件.

我們已經看到(参看第223頁)，在$s>1$时，冪空間是严格有模的，这样就保証了最好逼近的唯一性．然而这种断語对于在$s=1$时的冪空間以及契比謝夫空間都不正确．这种情况是容易完全了解的，只要我們注意到：对$1<s<\infty$时的点空間的情形，单位球是光滑的，支持平面化为切面；另一方面，在$s=1$时以及在契比謝夫点空間的情形下，单位球是凸多面体，因此支持平面可能与边界面重合或仅通过一边．最后，对于在$s<1$时的冪空間，单位球沒有凸性.

我們对契比謝夫空間C的情形特别有兴趣．它在某种意义下是一种極限情形，

因为当 $s\to\infty$ 时，空間 $L^{(s)}$ 中的模趋近于空間 C 中的模。一般說来，元素 a 用有限維空間 A 的逼近問題是否只有一解与元素 a 及空間 A 有关。但是哈尔[1]曾經指出一类空間 A 的特征性質，对于这类空間，任一元素 a 只有一个逼近；这个特征性質就是：A 中任何非零元素是一函数，而这函数在基本区間上的零点的个数小于 A 的維数（如我們在第 19 节所已看到）。C. H. 伯恩斯坦把产生这种空間的函数系称为契比謝夫系，契比謝夫所考虑的、加任意权的、由已給次数的多項式所构成的空間，恰好就是最簡单的例子。

对已給次数的多項式的逼近的唯一性定理，不能推广到多变数函数的情形上。童奈里[2] 曾經首先举例說明这个問題。

哈尔条件是逼近的唯一性的充分条件(在通常的多項式的情形下，这条件显然成立)，此点較早已有証明；至于它在一般情形下的必要与充分性，例如在 H. И. 阿希哲与 И. П. 那湯松的专著中也有証明。

---

1) A. Haar, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen (Math. Ann., **78**, 1918).

2) 参看第四章文献，L. Tonelli[1].

文　　献

函数插补与逼近的一般性的文献来源

П. Л. Чебышев. [1] Полное собрание сочинений. Математический анализ, т. II (1947) и т. III (1948), М.—Л., Изд-во АН СССР.

Научное наследие П. Л. Чебышева, т. I, Математика, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945.

А. А. Марков. [1] Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

С. Н. Бернштейн. [1] Собрание сочинений. Конструктивная теория функций, т. I (1952) и т. II (1954), Изд-во АН СССР.

[2] Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[3] Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, Л.—М., ОНТИ, 1937.

Н. И. Ахиезер. [1] Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., Гостехиздат, 1947 (本書已有中譯本).

И. П. Натансон. [1] Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

С. М. Никольский. [1] Приближение многочленами функций действительного переменного («Математика в СССР за тридцать лет (1917—1947)», М.—Л., Гостехиздат, 1948) (有中文单行本).

Ch. de la Valleé Poussin. [1] Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

第 一 章 文 献

Я. С. Безикович. [1] Исчисление конечных разностей, ЛГУ, 1939.

С. Н. Бернштейн. [1] Несколько замечаний об интерполировании (1916), *Сочинения*, т. I, стр. 253—263.

[2] Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.

А. О. Гельфонд. [1] Исчисление конечных разностей, М.—Л., Гостехиздат, 1952 (本書已有中譯本).

В. Л. Гончаров. [1] Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. (Ann. Scient. Éc. Norm., 1930).

[2] Интерполяционные процессы и целые функции. (Успехи матем. наук, вып. 3, 1937.)

А. А. Марков. [1] Исчисление конечных разностей, Спб., 1889.

В. Э. Милн. [1] Численный анализ, ИЛ, 1951.

И. П. Натансон. [1] Конструктивная теория функций, ч. 3, гл. I—VI.

[2] О признаке Дини при тригонометрическом интерполировании. (Докл. АН СССР **42**, № 2, 1944.)

Д. Ф. Стефенсен. [1] Теория интерполяции, М.—Л., ОНТИ, 1935.

Э. Уиттекер и Г. Робинсон. [1] Математическая обработка результатов наблюдений, Л.—М., ГТТИ,

1933.

Ch Hermite. [1] Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (Journ. f. d. reine u. angew. Math. **84**, 1878.)

N. E. Nörlund. [1] Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924.

C. Runge. [1] Über empirische Funktionen u. die Interpolation Zwischen äquidistanten Ordinaten. (Zeitschrift f. Math. u. Phys. **46**, 1901.)

C. Runge u. H. König. [1] Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin, 1924.

第二章文献

Н. И. Ахиезер. [1] Лекции по теории аппроксимации, гл. I.

С. Н. Бернштейн. [1] Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей (1912), *Сочинения*, т. I, стр. 105—106.

[2] Добавление к заметке Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» (1932), *Сочинения*, т. II, стр. 155—158.

[3] О сходимости многочленов $\sum_{0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$ в комплексной области (1943), *Сочинения*, т. II, стр. 310—348.

[4] Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа (1932), *Сочинения*, т. II, стр. 130—140.

Е. В. Вороновская. [1] Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна. (Докл АН СССР, 1932. стр. 79—85.)

Л. В. Канторович. [1] О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала. (Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, стр. 1103—1115.)

И. П. Натансон. [1] Конструктивная теория функций, ч. 1, гл. I, VII, VIII; ч.3, гл. II.

И. Н. Хлодовский. [1] О некоторых свойствах полиномов С. Н. Бернштейна. (Труды Всесоюзного съезда математиков в Харькове, 1930.)

E. Borel. [1] Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur développement en séries de polynomes, Paris, 1905.

P. Erdös u. P Turan. [1] On interpolation. (Ann. of Math., **38**, 1937, стр. 142—155.)

G. Faber. [1] Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen (Jahresbericht D. Math. Vereinigung, **23**, 1914.)

L. Fejér. [1] Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. (Math. Zeitschr., **32**, 1930.)

E. Landau. [1] Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. (Rend. Circ. Mat. Palermo, **25**, 1908.)

H. Lebesgue. [1] Sur l'approximation des fonctions. (Bull. Sc. Math., **22**, 1898.)

Ch. de la Vallée Poussin. [1] Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leur dérivées par des polynomes et des suites finies de Fourier. (Bull. Ac. de Belgique, **3**, 1908.)

[2] Leçons sur l'approximation de fonctions.

K. Weierstrass. [1] Über die empirische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente (1885), Werke, Bd. III.

第三章文献

Н. И. Ахиезер. [1] Общая теория полиномов Чебышева. (Научное наследие П.Л. Чебышева, т. I.)

[2] Лекции по теории аппроксимации, гл. III.

С. Н. Бернштейн. [1] О многочленах, ортогональных на конечном отрезке (1930), *Сочинения*, т. II, стр. 7—106.

[2] Об одном методе суммирования тригонометрических рядов (1930), *Сочинения*, т. I, стр. 523—525.

Я. Л. Геронимус. [1] Теория ортогональных многочленов (Обзор достижений отечественной математики), М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Д. Джексон. [1] Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.

Р. Курант и Д. Гильберт. [1] Методы математической физики, т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

А. А. Марков. [1] Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей. (Избранные труды по теории непрерывных дробей, Гостехиздат, 1948.)

И. П. Натансон. [1] Конструктивная теория функций, ч. 2.

Г. Полиа и Г. Сегё. [1] Задачи и теоремы из анализа, т. 2, отдел VI, М.—Л., ОНТИ, 1938.

И. И. Привалов. [1] Ряды Фурье, М.—Л., ГТТИ, 1931.

Н. Я. Сонин. [1] О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функциях. (Варшавские университетские известия, 1887, стр. 1—76.)

[2] Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. (Math. Ann., **16**, 1880, стр. 1—80.)

Ю. В. Сохоцкий. [1] Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. Спб., 1873.

Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях, Харьков—Киев, Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1936 [同样, Ann. Fac. Sc. Toulouse, **8** (1894) и 9 (1895)].

П. Л. Чебышев. [1] О непрерывных дробях (1855), *Сочинения*, т. II, стр. 103—126.

[2] Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859), *Сочинения*, т. II, стр. 314—334.

[3] Об одном новом ряде (1858), *Сочинения*, т. II, стр. 236—238.

[4] Об интерполировании величин равноотстоящих (1875), *Сочинения*, т. III, стр. 66—87.

[5] О разложении функций одной переменной (1859), *Сочинения*, т. II, стр. 335—341.

[6] Об интерполировании (1864). *Сочинения*, т. II, стр. 357—374.

E. Christoffel. [1] Über die Gaussische Quadratur und eine Veralgemeinerung derselben. (Journ. f. reine u. angew. Math., **55**, 1858.)

G. Darboux. Mémoire sur les fonctions des grands nombres. (Journ. des Math. pures et appl., 1878.)

L. Fejér. [1] Untersuchungen über Fouriersche Reihen. (Math. Ann., **58**, 1904.)

J. P. Gram. Über die Entwickelung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. (Journ. f. reine u. angew. Math., **94**, 1883.)

A. Haar. [1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Math. Ann., **69**, 1910.)

E. Heine. [1] Theorie der Kugelfunktionen und der verwandter Funktionen. Berlin, 1878.

Ch. Hermite. [1] Sur un nouveau développement en série de fonctions. (Comptes Rendus **58**, 1864.)

C. G. J. Jacobi. [1] Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. (Journ. f. reine u. angew. Math., 1859.)

E. Laguerre. [1] Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$. (Bull. Soc. Math. France, 1879.)

H. Laurent. [1] Traité d'analyse, t. V, Paris, 1890.

H. Lebesgue. [1] Sur les intégrales singuliéres. (Ann. Fac. Sc. Toulouse, **1**, 1909, стр. 25—117.)

O. Perron. [1] Theorie der Kettenbrüche, Leipzig, 1911.

C. Runge und H. König. [1] Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin, 1924.

W. Rogosinski. [1] Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. (Math. Ann., **95**, 1925.)

J. Shohat. [1] Théorie générale des polynomes orthogonaux (Mém. des Sciences Math., **66**, 1934.)

G. Szegö. [1] Orthogonal polynomials (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **23**, 1939.)

第四章文献

Н. И. Ахиезер. [1] Лекции по теории аппроксимации. гл. II и V.

[2] О наилучших приближениях аналитических функций. (Докл. АН СССР. **18**, 1938, стр. 241—244.)

С. Н. Бернштейн. [1] О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912), *Сочинения*, т. I, стр. 11—104.

[2] О новых исследованиях, относящихся к наилучшему приближению непрерывных функций многочленами (1912), *Сочинения*, т. I. стр. 112—123.

[3] Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций (1913), *Сочинения*, т. I, стр. 127—135.

[4] Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций, обладающих данными особенностями (1913), *Сочинения*, т. I, стр. 136—145.

[5] Современное состояние и проблемы теории приближения функций вещественного переменного посредством многочленов (1930), *Сочинения*, т. I, стр. 500—519.

[6] Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.

[7] Конструктивная теория функций вещественной переменной (1938), *Сочинения*, т. II, стр. 295—300.

[8] Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций (1938), *Сочинения*, т. II, стр. 292—294.

[9] Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева (1945), *Сочинения*, т. II, стр. 349—360.

[10] О роли неравенств и экстремальных проблем в математическом анализе. (Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции, 1947, стр. 114—133.)

[11] Чебышев, его влияние на развитие математики. (Уч. зап. МГУ **91**, 1947, стр. 35—45.)

[12] Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926.

В. Л. Гончаров. [1] Теория наилучшего приближения функций. (Научное наследие П. Л. Чебышева, т. I, стр. 122—172.)

Е. И. Золотарев. [1] Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях наименее и наиболее уклоняющихся от нуля (1877), *Сочинения*, т. II.

А. А. Марков. [1] Об одном вопросе Д. И. Менделеева (1889). (Избранные труды по теории непрерывных дробей, Гостехиздат, 1948.)

И. П. Натансон. [1] Конструктивная теория функций, ч. 1, гл. II—VI, IX; ч. 3, гл. IV.

С. М. Никольский. [1] Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. (Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **15**, 1945, стр. 1—76.)

И. В. Ценов. [1] Некоторые вопросы теории приближения функций. (Матем. сборн. **21**, 1947, стр. 435—439.)

[2] Об одном вопросе приближения функций полиномами. (Матем. сборн. **28**, 1951, стр. 473—478.)

П. Л. Чебышев. [1] Теория механизмов, известных под названием параллелограммов (1854), *Сочинения*, т. II, стр. 23—51.

[2] Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), *Сочинения*, т. II, стр. 151—235.

[3] Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями (1859), *Сочинения*, т. II, стр. 244—313.

L. Fejér. [1] Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen.(Math. Zeitschr., **37**, 1933.)

D. Jackson. [1] Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen. Göttingen, 1911.

[2] The theory of approximation. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **11**, 1930.)

G. Pólya. [1] Über die Konvergenz von Quadraturverfahren (Math. Zeitschr., **37**. 1933.)

M. Riesz. [1] Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome (Jahresber. D. Math. Verein., **23**, 1914.)

[2] Formule d' interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique (Comptes rendus, **158**, 1914, стр.1152—1154.)

[3] Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. (Acta Math., **40**, 1916, стр. 337—347.)

I. Schur. [1] Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervalle. (Math. Zeitschr., **4**, 1919, 271—287.)

G. Szegö. [1] Über einen Satz von A. Markoff. (Math. Zeitschr., **23**, 1925.)

L. Tonelli. [1] I polinomi d'approssimazione di Tchebychev. (Ann. di Math., **15**, 1908.)

A. Zygmund. [1] Smooth Functions. (Duke Math. Journ., **12**, 1945, стр. 47—76.)

第五章文献

В. Л. Гончаров. [1] Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques (Ann. Sc. Éc. Norm., **47**, 1930, стр. 1—78.)

[2] О корректирующих множителях интерполяции. (Докл. АН СССР, **32**, 1941, стр. 471—473.)

[3] Об одной интерполяционной схеме общего вида. (Докл. АН СССР, **59**, 1948, стр. 1529—1532.)

А. Н. Колмогоров. [1] Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции. (Успехи матем. наук **3**, вып. **1**, 1948, стр. 216—221.)

С. Н. Мергелян. [1] Равномерные приближения функций комплексного переменного. (Успехи матем. наук **7**, вып. 2, 1952, стр. 31—122.)

S. Bochner. [1] Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. (Math. Zeitschr. **14**., 1922.)

T. Carleman. [1] Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen (Ark. v. Math., Astr. Fysik, **17**, 1922—1923.)

L. Fejér. [1] Interpolation und konforme Abbildung. (Gött. Nachrichten, 1918.)

Ch. Hermite. [1] Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (Journ. f. die reine u. angew. Math. **84**, 1878.)

P. Montel. [1] Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris, 1910.

K. Runge. [1] Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. (Acta Math., **6**, 1885.)

G. Szegö. [1] Über die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystem. (Math. Zeitschr., **12**, 1922.)

[2] Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. (Math. Zeitschr., **9**, 1921.)

J. L. Walsh. [1] Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **20**, 1935.)

[2] Approximation by polynomials in the complex domain. (Mém. des Sc. Math., **73**, 1935.)

索　引

（表中数字系指頁数）